Veröffentlichungen
des Geophysikalischen Instituts der Universität Leipzig
Herausgegeben von dessen Direktor
L. Weickmann

Zweite Serie

Spezialarbeiten aus dem
Geophysikalischen Institut

Band V Heft 1

# Zur Theorie der Wellenbewegungen in Luft und Wasser

Von

Bernhard Haurwitz, Leipzig

Mit 5 Figuren, 14 Tabellen

Leipzig 1931

# Inhaltsverzeichnis.

# Zur Theorie der Wellenbewegungen in Luft und Wasser.

Von

Bernhard Haurwitz.

Mit 5 Figuren und 14 Tabellen.

## Einleitung.

Gerät eine inkompressible, homogene Flüssigkeit mit freier Oberfläche unter dem Einfluß einer äußeren Störung in Schwingungen, so pflanzen sich diese bekanntlich[1]) mit der Geschwindigkeit

$$v^* = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \mathfrak{Tg}\, 2\pi \frac{h}{L}}$$

fort, wobei $h$ die Tiefe der Flüssigkeit, $L$ die Wellenlänge, $g$ die Fallbeschleunigung bedeutet.

Ist speziell, wie z. B. in der Gezeitentheorie angenommen werden kann, die Tiefe der Flüssigkeit sehr gering im Verhältnis zur Wellenlänge, so geht diese Formel über in $\sqrt{gh}$, die Lagrangesche Formel für die Wellengeschwindigkeit „langer" Wellen auf relativ seichtem Wasser. Da bei Wellen von diesem Typus die Orbitalbahnen der einzelnen Wasserpartikeln sehr langgestreckt sind, kann man, wie es in der Gezeitentheorie geschieht, die Vertikalbeschleunigung vernachlässigen. V. Bjerknes 1923[2]) hat für Wellenbewegungen von diesem Typus den Namen „quasistatisch" vorgeschlagen. Kann dagegen, wie man ungenau sagt, die Tiefe des Wassers als unendlich groß gegen die Wellenlänge angesehen werden, so ergibt sich die von Stokes abgeleitete Formel

$$v^* = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}.$$

Die Sprechweise „unendliche Tiefe" ist insofern irreführend, als schon für $\frac{h}{L} > 0{,}4$ $\mathfrak{Tg}\, 2\pi \frac{h}{L} = 1$ gesetzt werden kann, bis auf

[1]) Vgl. die Lehrbücher der Hydrodynamik, z. B. Lamb.

[2]) Zitate werden nach Verfasser und Jahreszahl angegeben. Vgl. das Literaturverzeichnis.

ca. 1% Genauigkeit. Wir werden deshalb im folgenden häufig in diesem Falle von Wellen vom Stokes'schen Typus sprechen.

Hat man im Innern der sonst homogenen Flüssigkeit eine Diskontinuitätsfläche, an der sich Dichte und Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit sprunghaft ändern, so sind auch an dieser Fläche, genau wie an der freien Oberfläche, Wellen möglich. Auch hier ergeben sich wieder verschiedene Formeln für die Wellengeschwindigkeit, je nach der Größe des Verhältnisses $\frac{h}{L}$. Wegen Einzelheiten kann auf die Lehrbücher der Hydrodynamik verwiesen werden. Wir werden außerdem später diese Formeln jeweilig zum Vergleich heranziehen.

Die Voraussetzung konstanter Dichte der schwingenden Medien ist aber bekanntlich nicht einmal für Meere und Seen immer erfüllt, während man hier von der Kompressibilität im allgemeinen absehen kann. Wir wissen ja, daß neben scharfen Sprüngen der Dichte, wie sie infolge von Veränderungen von Temperatur und Salzgehalt erzeugt werden, auch stetige Änderungen vorkommen. Es ist daher bereits von verschiedenen Seiten auch die Wellenbewegung in einer inkompressiblen Schicht, deren Dichte sich mit der Höhe stetig ändert, untersucht worden. Poisson 1816 zeigte, daß in einer unendlichen tiefen Flüssigkeit mit freier Oberfläche auch bei stetiger Dichteänderung die Wellengeschwindigkeit gleich der von Stokes berechneten ist. Lord Rayleigh 1883 hat dann die Wellenbewegungen untersucht, die in einer Flüssigkeitsschicht zwischen starren Wänden möglich sind, wenn die Dichte sich exponentiell mit der Höhe ändert. In einer homogenen Flüssigkeit können zwischen starren Grenzen keine Wellenbewegungen entstehen[1]), wohl aber in Flüssigkeiten mit variabler Dichte.

Neben den beiden festen Begrenzungen treten dann noch weitere Knotenlinien der Wellenbewegung auf. Burnside 1889 hat, offenbar ohne die Rayleighsche Arbeit zu kennen, die gleiche Frage behandelt. Er nimmt zunächst $n$ Schichten der gleichen Höhe $h$ an. In jeder dieser Schichten ist die Dichte konstant. Nachdem die Wellenbewegung in jeder Schicht berechnet ist, läßt er $n$ gegen $\infty$, also $h$ gegen 0 gehen, aber so, daß $n \times h$ einen festen Grenzwert, die Höhe der ganzen Flüssigkeitsschicht, hat. Seine Arbeit ist im wesentlichen wegen ihrer originellen Methode von Interesse. Love 1891 zweifelte die Berechtigung des

[1]) V. Bjerknes und H. Solberg 1929 haben nachgewiesen, daß derartige „zellulare" Wellen auch in homogenen Medien doch auftreten können, sobald man den Einfluß der Corioliskraft mit in Betracht zieht.

Burnsideschen Grenzüberganges an. Er untersuchte daher das Problem für eine Flüssigkeit mit freier Oberfläche nochmals auf dem gleichen Wege wie Rayleigh, anscheinend auch, ohne dessen Untersuchungen zu kennen.

Für die Atmosphäre ist neben den vertikalen Änderungen der Dichte, die bereits im Anfangszustand vorhanden sind, auch die Berücksichtigung der Dichteänderungen infolge der Kompressibilität von größter Wichtigkeit. In der Hydrodynamik wird dabei gewöhnlich von der Gravitation abgesehen. Man zieht nur die elastischen Kräfte in Betracht und kommt auf diese Weise zu den Schallwellen.

Die Gravitationswellen in der Atmosphäre bei Berücksichtigung der Kompressibilität hat Lamb 1911 behandelt. Er beschäftigt sich zunächst mit den Wellenbewegungen in einer Schicht, in der die Temperatur mit der Höhe linear abnimmt. Infolgedessen hat die Schicht eine bestimmte obere Grenze, nämlich dort, wo die Temperatur Null erreicht wird. Die Zustandsänderungen werden als adiabatisch vorausgesetzt.

Ferner untersucht Lamb die Wellenbewegungen an einer Diskontinuitätsfläche in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit für den Fall adiabatischer Zustandsänderungen und bei Inkompressibilität. V. Bjerknes 1916 gab eine systematische Aufstellung der Differentialgleichungen für die Wellenbewegungen in einer kompressiblen schweren Flüssigkeit, wobei vorausgesetzt ist, daß die Flüssigkeit, von der Wellenbewegung abgesehen, ruht. Die Erdrotation wird dabei noch nicht mitberücksichtigt. 1926 bzw. 1927 gab er dann eine Verallgemeinerung dieser Gleichungen durch die Aufstellung der atmosphärischen Störungsgleichungen, die die Erdrotation mit berücksichtigen und den Grundzustand beliebig lassen. 1929 veröffentlichte er schließlich eine nochmalige Erweiterung, bei der vor allem die Grenzbedingungen z. T. nach Untersuchungen von H. Solberg 1928 verbessert wurden. Außerdem enthält diese Arbeit neben der Eulerschen Form auch die Lagrangesche Form der Störungsgleichungen.

Neben diesen sehr wichtigen methodischen Arbeiten untersuchte V. Bjerknes 1923 auch die quasistatische Wellenbewegung in barotropen Flüssigkeiten. Barotrop heißt nach Bjerknes bekanntlich eine Flüssigkeit dann, wenn ihre Dichte als eine Funktion des Druckes, nicht aber auch anderer Größen dargestellt werden kann (vgl. V. Bjerknes 1921). Anders ausgedrückt, müssen in der Flüssigkeit die Flächen gleichen Druckes mit denen gleicher Dichte zusammenfallen. Sonst ist die Flüssigkeit baroklin. Die bekannten

Helmholtzschen Wirbelsätze gelten nach Bjerknes (z. B. 1921) nur für barotrope Flüssigkeiten, worin gerade das Wichtige der Bjerknes'schen Terminologie besteht. In dem ersten Teil seiner Untersuchung findet Bjerknes, daß die Geschwindigkeit dieser quasistatischen Wellenbewegungen in einer einzigen barotropen Flüssigkeitsschicht nicht viel von dem Fall einer inkompressiblen ungeschichteten Flüssigkeit gleicher Tiefe abweicht. Im zweiten Teil werden die Fundamentalgleichungen für ein System von beliebig vielen derartiger Schichten aufgestellt und im dritten Teil der Spezialfall behandelt, daß nur zwei Schichten gegeben sind. Auch dann ist der Einfluß der (barotropen) Schichtung auf die quasistatische Wellenbewegung nur gering. Der Fall dreier übereinander gelagerter Schichten hat im Anschluß an V. Bjerknes' zitierte Arbeit Høgberg 1923 untersucht. Den Fall einer isotherm geschichteten Atmosphäre mit adiabatischen Zustandsänderungen hat H. Solberg 1929 mit Hilfe der Störungsgleichungen in Lagrangescher Form behandelt, wobei über die Wellenlängen von vornherein nichts vorausgesetzt wurde. Da es sich bei dieser Untersuchung vor allem um das Zyklonenproblem handelte, wurde im Gegensatz zu den Arbeiten über quasistatische Wellenbewegungen auch die Erdrotation mit berücksichtigt. Leider sind die Solbergschen Resultate bisher nur in einem kurzen, wenn auch sehr klaren Referat publiziert. Wellenbewegungen an einer atmosphärischen Grenzfläche unter Berücksichtigung der Erdrotation hat auch Defant 1926 untersucht. Doch ist nicht ganz klar zu ersehen, ob seine Resultate nicht nur für den Fall isothermer Schichtung und isothermer Zustandsänderung gelten, da er für die Zustandsänderungen das Boyle-Mariottesche Gesetz annimmt und Isothermie voraussetzt. Exner 1929 hat gleichfalls Gravitationswellen in der Atmosphäre bei isothermer Schichtung und adiabatischer Zustandsänderung untersucht. Seine Resultate können aber ebenfalls nicht als ganz einwandfrei angesehen werden, da sich aus seinen Zahlenbeispielen gewisse Inkonsequenzen seiner Rechnungen ergeben. Schließlich sei noch die Arbeit von Sano 1913 erwähnt, in der ebenfalls die Wellenbewegungen in einer isothermen Atmosphäre bei adiabatischen Änderungen behandelt werden. Im übrigen ist die Problemstellung dieser Arbeit von der der vorliegenden aber ganz verschieden, da es sich dort vor allem um Superposition von Wellen in einer unendlich tiefen Schicht handelt.

Neben diesen Arbeiten, die sich mit den freien Schwingungen beschäftigen, seien noch der Vollständigkeit halber diejenigen erwähnt, die die Gezeiten oder besser die erzwungenen Schwingungen

der Atmosphäre behandeln. Es sind vor allem Margules 1890, 1892 und 1893, Chapman 1924, Bartels 1927 und bis zu einem gewissen Grade auch Jeffreys 1926. Auch die Arbeiten von K. Uller können hier Erwähnung finden.

Es mag auch an dieser Stelle betont werden, daß es völlig unzulässig ist, die Schwingungen der Luft zu berechnen, als ob es sich dabei um einen Massenpunkt handelte, auf den nur eine Kraft, nämlich sein eigenes Gewicht vermindert um das Gewicht der verdrängten Luft, wirkt. Brunt 1926 hat einen derartigen Versuch unternommen, der damals von Whipple beanstandet wurde. Ich habe an anderer Stelle, 1930, darauf hingewiesen, daß derartige Rechnungen ohne Interesse für die Dynamik flüssiger und gasförmiger Medien sind, und habe diese Ablehnung ausführlich begründet, so daß ich mich hier mit diesem Hinweis begnügen kann.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, was für Wellen in geschichteten inkompressiblen und kompressiblen Medien möglich sind, sowie die Modifikationen festzustellen, welche die Wellen in inkompressiblen Medien erleiden, sobald sich die Grundströmung linear mit der Höhe ändert. Es handelt sich hier hauptsächlich darum, überhaupt festzustellen, was für Arten von Wellen in geschichteten Medien auftreten, bzw. wie die bekannten Wellenarten durch die Schichtung und Kompressibilität beinflußt werden. Zu diesem Zweck wird vor allem Gewicht auf die Frequenzgleichung, die die Wellengeschwindigkeit liefert, und ihre Diskussion gelegt. Über die Wellenbewegungen einer einzigen Flüssigkeitsschicht ist man durch eine ganze Reihe bereits erwähnter Arbeiten orientiert. Dagegen liegen außer den Bjerknes'schen Arbeiten über quasistatische Wellenbewegungen und bis zu einem gewissen Grade der Lambschen Arbeit kaum Untersuchungen vor über die Wellen an inneren Schichtgrenzen in Flüssigkeiten mit stetig veränderlicher Dichte. Zur Berechnung der Wellenbewegungen sind hier die hydrodynamischen Gleichungen in Eulerscher Form benutzt worden. Wie die gleichzeitige Verwendung der Lagrangeschen Gleichungen ergeben hat, sind diese, vor allem wegen der einfachen Form der Grenzbedingungen und der Zustandsgleichungen häufig bequemer als die Eulerschen. Es ist beabsichtigt, die Ableitung der hier gewonnenen Ergebnisse über die Helmholtzschen Luftwogen (vgl. §§ 7 und 18) später auch in Lagrangescher Form zu publizieren.

Da es sich in der vorliegenden Arbeit um Wellenbewegungen handelt, die eine relativ kleine Abweichung von einem gegebenen Grundzustand darstellen, sind das gegebene Hilfsmittel zur analy-

tischen Behandlung die Bjerknes'schen atmosphärischen Störungsgleichungen. Diese werden im I. Abschnitt im engen Anschluß an Bjerknes 1929 aufgestellt, und zwar für zweidimensionale Bewegungen in einer vertikalen Ebene. Die Beschränkung auf die Wellenbewegung in einer vertikalen Ebene hat zur Folge, daß von dem Drehvektor der Erdrotation nur die zu dieser Ebene senkrechte horizontale Komponente mit berücksichtigt werden kann. Sie ist von sehr geringem Einfluß und wird im allgemeinen außer Betracht gesetzt werden. Auf das Zyklonenproblem sind daher die Ergebnisse dieser Arbeit nicht unmittelbar anwendbar. Der Grundzustand[1]) wird dahin spezialisiert, daß die Dichte und die längs der $x$-Achse verlaufende beschleunigungsfreie Grundströmung mit der Höhe $z$ veränderlich sein können. Die partiellen Differentialgleichungen, die man so erhält, sind linear, homogen, und ihre Koeffizienten sind Funktionen von $z$ allein (§ 2). Durch Abspaltung periodischer Faktoren erhält man daraus in bekannter Weise gewöhnliche, auch lineare und homogene Differentialgleichungen für die Störungsamplituden (§ 3). Die Koeffizienten dieser Differentialgleichungen werden konstant, wenn man entweder voraussetzt, daß die Grundströmung in jeder Höhe konstant ist und die Dichte exponentiell mit der Höhe abnimmt, oder daß die Dichte konstant ist und die Grundströmung sich linear mit der Höhe ändert. Dabei sind natürlich sprunghafte Änderungen der Dichte und der Grundströmung von Schicht zu Schicht zugelassen.

Zunächst werden Wellenbewegungen in inkompressiblen Flüssigkeitsschichten betrachtet, deren Dichte sich exponentiell mit der Höhe ändert, deren Grundströmung in jeder Schicht konstant ist (Abschnitt II). Da es sich also um eine barokline Flüssigkeit handelt, sind die Bewegungen nicht wirbelfrei (§ 4). Liegt eine Schicht mit freier Oberfläche vor, so gilt, wenn die Schichttiefe sehr groß ist, die Stokes'sche Formel für die Wellengeschwindigkeit; wenn die Wellen sehr lang sind, ist die Wellengeschwindigkeit gleich der aus der Lagrangeschen Formel folgenden, nur daß die Höhe der Schicht (äquivalente Höhe), aus der sich die Wellengesshwindigkeit berechnet, etwas verkürzt erscheint (§ 5). Im Falle zweier Schichten zwischen starren Grenzen sind, wenn die obere Schicht sehr flach, die untere Schicht sehr tief ist, an der gemeinsamen Grenzfläche Wellen von einem gemischten Typus möglich; in die Formel für die Wellengeschwindigkeit geht sowohl die Wellenlänge, wie die

[1]) Unter „Grundzustand" ist der Zustand der Flüssigkeit vor Einsetzen der Wellenbewegung zu verstehen. Entsprechendes gilt für die Grundströmung.

Tiefe der Deckschicht ein, daneben natürlich die Konstanten der Dichteabnahme. Sind beide Schichten sehr tief, so sind an der inneren Grenzfläche Wellen möglich von wesentlich höherer Geschwindigkeit als im Falle konstanter Dichten (§ 6). Ist das zweifach geschichtete System von einer freien Oberfläche begrenzt, so sind bei unendlicher Tiefe der oberen Schicht die gleichen Wellenbewegungen möglich, wie bei zwei Schichten zwischen starren Grenzen und daneben noch Wellen, die den Stokes'schen Wellen in einer unendlich tiefen Schicht mit freier Oberfläche entsprechen. Ist dagegen die untere Schicht sehr tief, die obere flach, so erhält man für die Geschwindigkeit der Wellen an der inneren Grenzfläche eine Formel, die sich von der entsprechenden für den homogenen Fall nur dadurch unterscheidet, daß die äquivalente Höhe gegenüber der wirklichen auch hier wieder ein wenig verkleinert erscheint (§ 8). Ähnliche Feststellungen über den geringen Einfluß der (barotropen) Schichtung hatte schon V. Bjerknes 1923 gefunden. Sie werden hier für einen baroklinen Fall bestätigt. Im Falle dreier Schichten zwischen starren Grenzen ergibt sich, daß bei großer Tiefe aller drei Schichten an jeder der beiden inneren Grenzflächen für sich Wellen vorkommen, wie sie möglich wären, wenn die andere innere Grenzfläche erstarrt ist. Eine derartige Zerlegung ist für endliche Schichtdicken nicht mehr möglich. Nimmt man an, die oberste und unterste Schicht bestehen jede aus einer Flüssigkeit konstanter Dichte, in der mittleren Schicht dagegen ändere sich die Dichte stetig nach einem Exponentialgesetz von der Dichte der untersten zu der der obersten Schicht, so werden bei geringerer Ausdehnung der Übergangsschicht die Wellengeschwindigkeiten ein wenig kleiner als im Fall scharfen Dichtesprunges (§ 9). Hat die oberste Schicht eine freie Oberfläche, so gilt bei unendlicher Tiefe dieser Schicht über die Wellen das eben Gesagte; außerdem sind noch die Stokes'schen Oberflächenwellen auf tiefem Wasser möglich.

Einen anderen Fall, der auf gewöhnliche, lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führt, erhält man, wenn man die Wellenbewegungen in Flüssigkeitsschichten mit konstanter Dichte untersucht, bei denen sich aber die Grundströmung linear mit der Höhe ändert (Abschnitt III). Wir haben also, abgesehen natürlich von den Diskontinuitätsflächen, eine barotrope Flüssigkeit mit dem konstanten Wirbel $\frac{dU}{dz}$, d. i. die vertikale Änderung der Grundströmung (§ 11). Hat man eine Schicht mit freier Oberfläche und linearer Windzunahme, so wird das „dynamische“

Glied[1]) der Wellengeschwindigkeit, das ist im wesentlichen das Glied unter dem Wurzelzeichen, nur sehr wenig geändert. Dagegen sind die Änderungen des „konvektiven“ oder „kinematischen“ Gliedes beträchtlicher. Im Falle einer flachen Schicht tritt nämlich die Geschwindigkeit in der Mitte der Schicht an die Stelle der in den früheren Fällen konstanter Grundströmung. Im Fall einer sehr tiefen Schicht spielt die Strömungsgeschwindigkeit in der Tiefe $\frac{L}{4\pi}$ die Rolle der mittleren Geschwindigkeit (§ 12). Auch im Falle zweier Schichten sind die Einflüsse auf das dynamische Glied der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur gering (§ 12). Ist die obere Grenzfläche der oberen Schicht frei, und die obere Schicht selbst unendlich tief, so läßt wie früher eine Zerlegung der Frequenzgleichung erkennen, daß einmal Wellen von derselben Art wie bei fester unterer Schicht möglich sind, zweitens Wellen von der Art wie bei fester oberer Grenze. Diese Zerlegung gilt natürlich bei Vorhandensein einer linearen Windänderung ebenso wie bei konstanter Grundströmung (§ 13). Im Falle dreier tiefer Schichten mit fester oberster Grenze sind auch bei linearer Windänderung Wellen an jeder Schichtgrenze möglich, so als ob die Schichtgrenze starr wäre. Merkbare Einflüsse hat die Windänderung auch hier demnach nur auf das kinematische Glied der Wellengeschwindigkeit (§ 13). Hat die oberste Schicht eine freie Oberfläche und ist ihre Tiefe genügend groß, so besteht der Einfluß der freien Oberfläche nur darin, daß außer den genannten Wellensystemen noch ein weiteres möglich ist, wie es bei Erstarrung der beiden unteren Schichten vorkäme. Diese Ergebnisse über die verschiedenen Wellensysteme dürften auch, abgesehen von der Berücksichtigung der linearen Windänderung, interessieren.

Die bisher erwähnten Resultate waren eigentlich nur auf die Hydrosphäre beschränkt. Um wirklich für die Atmosphäre brauchbare Resultate zu erhalten, haben wir den Einfluß der Kompressibilität zu berücksichtigen. Wir setzen dabei voraus, daß die Zustandsänderungen adiabatisch verlaufen und die Atmosphäre isotherm geschichtet ist (Abschnitt IV). Die Grundströmung ist in jeder Schicht konstant. Dann behalten unsere Differentialgleichungen konstante Koeffizienten. Auch jetzt ist die Flüssigkeit wieder baroklin, die Bewegung nicht wirbelfrei. Die Annahme gerade adiabatischer Änderungen statt ganz beliebiger polytroper ist nicht wesentlich für den Gang der Rechnung. In einer Schicht zwischen starren horizontalen Grenzen sind neben den longitudinalen Schallwellen

[1]) Vgl. V. Bjerknes 1923.

auch noch transversale Wellen möglich, ebenso wie im Falle einer geschichteten inkompressiblen Flüssigkeit. Dabei treten neben den beiden starren Grenzflächen noch im Innern der Flüssigkeit Knotenlinien auf. Besitzt die Flüssigkeit eine freie Oberfläche, so kommt man im Grenzfall sehr großer Tiefe wieder auf die Stokes'schen Oberflächenwellen, im Falle sehr flacher Schichten auf Wellen der gleichen Geschwindigkeit, wie im inkompressiblen Fall einer inhomogenen Flüssigkeit. Der Einfluß der horizontalen Komponente der Erdrotation ist sehr gering (§ 16). Die Wellen an der Grenze zweier unendlich tiefer Flüssigkeitsschichten haben kleinere Geschwindigkeit, als wenn die Flüssigkeit inkompressibel, aber inhomogen wäre, dagegen ist die Geschwindigkeit im vorliegenden Fall größer als in inhomogenen inkompressiblen Flüssigkeitsschichten (§ 17). Das hängt natürlich mit den Stabilitätsverhältnissen der einzelnen Schichtungen zusammen. Ist die obere Grenze der oberen Schicht frei, so ändert sich im Fall unendlicher Tiefe nichts, nur daß wieder Wellen vom Stokes'schen Typus als eine weitere Möglichkeit hinzukommen. Im Falle sehr flacher Schichten läßt sich mittels eines numerischen Näherungsverfahrens nachweisen, daß die Abweichungen, die die Berücksichtigung der Kompressibilität mit sich bringt, nur sehr gering sind.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist nicht die Erklärung einer bestimmten Erscheinung, sondern die Gewinnung eines Überblicks darüber, was für einen Einfluß die Berücksichtigung der vertikalen Dichteverteilung und der Kompressibilität auf die Wellenbewegungen hat. Infolgedessen handelt es sich bei den folgenden Rechnungen in der Hauptsache um die zunächst rein theoretisch bedeutungsvolle Ableitung und Diskussion von Formeln. Es erschien aber zweckmäßig, von vornherein die Brauchbarkeit der hier entwickelten Relationen durch ein Beispiel zu belegen. Als dieses wurden die Helmholtzschen Luftwogen gewählt, die sich dem Beobachter in Form der Wogenwolken darbieten[1]). Helmholtz hat bekanntlich bereits 1889 und 1890 gezeigt, wie sich die Länge dieser Wellen aus beobachtetem Wind- und Temperatursprung berechnen läßt. W. Wien hat dann 1894 und 1895 die Helmholtzschen Arbeiten erweitert und einige spezielle Annahmen über die durch Beobachtung bisher nicht festgestellte Form des Wellenprofiles gemacht. Bei der Annahme relativ sehr kleiner Wellen-

---

[1]) Die diesbezüglichen Formeln lassen sich auch noch durch eine andere Rechenmethode, als es hier geschieht, aus den allgemeinen Formeln für nichtstationäre Wellen ableiten. Im Zusammenhange der vorliegenden Untersuchung schien aber die angewandte Methode die beste.

höhen gehen die Formeln für die Wellenlängen dieser drei verschiedenen Wellenprofile ineinander über. Es kann durch Wegeners Untersuchungen 1906 als erwiesen angesehen werden, daß diese Näherungsformel für kleine Wellenlängen brauchbare Werte liefert. Allerdings erhält Wegener systematisch zu große Wellenlängen. Eine von ihm selbst gegebene Erklärung kann nicht als befriedigend angesehen werden. Andererseits erhält man aber bei Berücksichtigung der vertikalen Dichteabnahme und Vernachlässigung der Kompressibilität der Luft zu kleine Wellenlängen (§ 7 und § 18). Berücksichtigt man dagegen, wie es hier zum erstenmal geschieht, neben der vertikalen Dichteabnahme auch die Kompressibilität der Luft, so erhält man sehr gute Übereinstimmung mit den beobachteten Wellenlängen (§ 18).

Wir werden im folgenden nicht immer streng zwischen den Ausdrücken Flüssigkeit und Gas unterscheiden. — Eine gewisse Freiheit im Gebrauch dieser beiden Worte ist bei Untersuchungen, wie der vorliegenden berechtigt und im Wesen der Sache begründet. Die Dynamik der Hydrosphäre und Atmosphäre gehen beide von gleichen Grundvoraussetzungen aus und unterscheiden sich formal nur durch das Verschwinden oder Nichtverschwinden gewisser Konstanten.

# Abschnitt I.

## Gleichungen der Störungsbewegung einer vertikal geschichteten Flüssigkeit.

### § 1. Die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen.

Es bezeichne $\mathfrak{d}$ den Drehvektor der Erdrotation mit den Komponenten $\Omega_x$, $\Omega_y$, $\Omega_z$. Er ist parallel der Erdachse von S nach N gerichtet, sein Betrag ist gleich $|\mathfrak{d}| = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{sec}^{-1}$, das ist die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation. Ferner sei $\tilde{\mathfrak{v}}$ Geschwindigkeit, $\tilde{q}$ Dichte, $\tilde{p}$ Druck der Flüssigkeit an einem Ort, $\Phi$ das Potential der äußeren Kräfte (in unserem Fall die Resultierende aus Schwer- und Zentrifugalkraft). Dann lauten bekanntlich die Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen in Eulerscher Form:

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathfrak{v}} + 2\,\mathfrak{d} \times \mathfrak{v} + \frac{1}{\tilde{q}} \nabla \tilde{p} + \nabla \Phi = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{q}\,\tilde{\mathfrak{v}}) = 0. \qquad (2)$$

Zu diesen Gleichungen tritt noch die Zustandsgleichung, die eine Relation zwischen Dichte und Druck eines bestimmten Teilchens darstellt.

$$\tilde{q} = f(\tilde{p})$$

In allen geophysikalisch wichtigen Fällen gehen in diese Gleichung eigentlich noch weitere Variable, Temperatur, Salzgehalt usw. ein (barokliner Fall), jedoch können wir für unsere Probleme davon absehen, müssen dann aber mit V. Bjerknes 1929 voraussetzen, daß eine solche Gleichung für jede einzelne Partikel gilt und von Partikel zu Partikel verschieden sein kann. Um diese für ein Teilchen gültige Zustandsgleichung dem Eulerschen System anzupassen, bilden wir

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{p}}\,\frac{d\tilde{p}}{dt} = \gamma\,\frac{d\tilde{p}}{dt}$$

oder (3)

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \nabla \tilde{q} - \gamma \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \tilde{p} \right) = 0.$$

Sei $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor eines Punktes einer inneren oder äußeren Grenzfläche, $\varphi(\mathfrak{r}, t) = 0$ die Gleichung dieser Grenzfläche, so lauten die Gleichungen der Grenzflächenbedingungen

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \nabla \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}}' \cdot \nabla \varphi = 0, \end{cases}$$

wobei sich die ungestrichenen und gestrichenen Werte auf die beiden Seiten der Grenzfläche beziehen. Die Gleichungen (4) bringen bekanntlich zum Ausdruck, daß die Grenzfläche immer von denselben Teilchen gebildet werden muß. Ferner muß auf beiden Seiten der Grenzfläche derselbe Druck herrschen, also

$$\tilde{p} - \tilde{p}' = 0.$$

Fassen wir diese Formel mit Solberg 1928 als Gleichung der Grenzfläche auf, so verwandelt sich (4) in

$$(4\,\mathrm{a}) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \nabla\right)(\tilde{p} - \tilde{p}') = 0 \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}}' \cdot \nabla\right)(\tilde{p} - \tilde{p}') = 0. \end{aligned}$$

An einer freien Oberfläche muß der Druck konstant und gleich dem äußeren Druck sein. Die Grenzbedingung lautet also hier:

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \nabla \varphi = 0$$

oder

$$(5\,\mathrm{a}) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \nabla\right) \tilde{p} = 0.$$

An einer starren Grenzfläche liefert die partielle Differentiation nach der Zeit den Wert Null, und man erhält

$$(6) \qquad \tilde{\mathfrak{v}} \cdot \nabla \varphi = 0,$$

was die selbstverständliche Forderung ausdrückt, daß an der starren Grenzfläche die Geschwindigkeitskomponente normal zur Grenzfläche verschwinden muß.

## § 2. Die Störungsgleichungen des Problems.

Zur Behandlung unseres Problems der kleinen Schwingungen einer Flüssigkeit formen wir diese Gleichungen nach dem von V. Bjerknes 1926, 1927, 1929 angegebenen Prinzip der atmosphärischen Störungsgleichungen um. Wir nehmen also einen gleich anzugebenden Grundzustand der Flüssigkeitsströmung. Über diesen überlagern wir als Störungen die zu untersuchenden Wellen. Da-

bei sollen diese Störungen so klein sein, daß Glieder, die in den Störungsgrößen und ihren Ableitungen von 2. Ordnung sind, vernachlässigt werden können. Wegen der Aufstellung der allgemeinen Störungsgleichungen sei auf die zitierten Arbeiten von V. Bjerknes und H. Solberg verwiesen.

Die Gleichungen sollen hier von vornherein durch Wahl des Grundzustandes spezialisiert werden. Wir beschränken uns im ganzen Verlauf der Untersuchung auf eine zweidimensionale Flüssigkeitsströmung in der $xz$-Ebene ($x$-Achse horizontal, $z$-Achse vertikal aufwärts). In allen zur $y$-Achse senkrechten Ebenen herrsche also der gleiche Strömungszustand. Damit eine derartige Flüssigkeitsströmung in Ebenen parallel zur $xz$-Achse möglich ist, darf nur die $y$-Komponente des Erdrotationsvektors von Null verschieden sein. Anderenfalls würde die Ebene der Flüssigkeitsbewegung, falls sich die Flüssigkeit überhaupt in einer Ebene bewegt, gegen die $xz$-Ebene geneigt sein. Diese Voraussetzung über den Erdrotationsvektor ist natürlich sehr speziell, kann aber deswegen gemacht werden, weil bei den hier behandelten Problemen, im Gegensatz zum Zyklonenproblem etwa, die Berücksichtigung der Erdrotation von geringerem Interesse ist. Der Grundzustand sei eine Strömung parallel der $x$-Achse, deren Geschwindigkeit ebenso wie die Dichte des Mediums mit der Höhe $z$ veränderlich ist. Große Buchstaben bezeichnen die Elemente des Grundzustandes, kleine die des Störungszustandes. Beide addiert geben die allgemeine Bewegung, also

$$\tilde{\mathfrak{v}} = \mathfrak{V} + \mathfrak{v}, \qquad \tilde{p} = P + p, \qquad \tilde{q} = Q + q.$$

Die Einheitsvektoren in der $x$- und $z$-Richtung heißen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$, die Geschwindigkeitskomponenten $U$, $W$ bzw. $u$ und $w$.

Von den Gleichungen des Grundzustandes bleibt nur die Bewegungsgleichung in der $z$-Richtung (barometrische Höhenformel) übrig, alle anderen sind identisch erfüllt.

$$\frac{1}{Q}\frac{dP}{dz} = -g + 2\,\Omega_y U. \tag{1}$$

$g$ bedeutet hier die Fallbeschleunigung. Im Verhältnis zu ihr kann man das Glied $2\,\Omega_y U$ vernachlässigen, denn es ist $10^{-4}$ bis $10^{-3}$ mal kleiner. Da in (1) $Q$ nur Funktion von $z$ ist, ebenso $g$, das wir im übrigen für unsere Zwecke als konstant betrachten können, folgt, daß auch $P$ eine Funktion von $z$ allein ist. Wir führen ein:

$$\Gamma = \frac{dQ}{dP}.$$

Dabei soll sich diese Größe $\Gamma$ im Gegensatz zu $\gamma$ auf die geometrische Verteilung der Elemente $Q$ und $P$ beziehen. Um es deutlicher zu machen: habe ich die vertikale Verteilung der Dichte $Q$ in einem Diagramm mit dem Druck $P$ als Argument aufgetragen, so gibt $\Gamma$ den Richtungstangens dieser Kurve an. Zeichne ich dagegen eine Kurve, die die Abhängigkeit der Dichte $\tilde{q}$ eines Teilchens von dem Druck $\tilde{p}$ auf dieses Teilchen für verschiedene Werte von $\tilde{p}$ darstellt, so ist der Richtungstangens dieser Kurve durch $\gamma$ gegeben. Es war

$$\tilde{q} = f(\tilde{p})$$

oder nach der Taylorschen Reihenentwicklung

$$Q + q = f(P+p) = f(P) + \left(\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{p}}\right)_P \cdot p + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Da die Abweichungen vom Gleichgewichtszustand nur so klein sein sollen, daß man Glieder höherer Ordnung vernachlässigen darf, ergibt sich:

(2) $$q = \gamma_P \cdot p.$$

Der Index $P$ drückt aus, daß $\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{p}}$ an der Stelle $\tilde{p} = P$ zu bilden ist. Ferner ist nach (2, 1) (Striche bedeuten Differentiation nach $z$)

(3) $$Q' = \frac{dQ}{dP}\,\frac{dP}{dz} = -\Gamma g\,Q,$$

da wir ja, wie ausgeführt, das Glied mit $\Omega_y$ gegen $g$ vernachlässigen können. Ferner haben wir zu beachten, daß

$$\frac{1}{q}\nabla\tilde{p} = \frac{1}{Q+q}\nabla(P+p) = \frac{1}{Q}\left(1-\frac{q}{Q}\right)\nabla(P+p) = \frac{1}{Q}\nabla P - \frac{q}{Q^2}\nabla P - \frac{q}{Q^2}\Delta p$$
$$= \frac{1}{Q}\nabla P + \frac{q}{Q}g\mathfrak{k} - \frac{q}{Q^2}\nabla p.$$

Dann ergibt sich aus (1, 1), (1, 2) und (1, 3) nach dem Prinzip der kleinen Störungen, wie bei V. Bjerknes 1929 näher und allgemeiner abgeleitet,

(4) $$\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + U\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x} + iw(U' + 2\,\Omega_y) + \frac{1}{Q}\nabla p - \mathfrak{k}\left(2\,\Omega_y u - \frac{q}{Q}g\right) = 0,$$

(5) $$\frac{\partial q}{\partial t} + Q\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v} - wg\Gamma Q + U\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

(6) $$\frac{\partial q}{\partial t} + U\frac{\partial q}{\partial x} - w\Gamma g\,Q - \gamma\left(\frac{\partial p}{\partial t} + U\frac{\partial p}{\partial x} - wg\,Q\right) = 0.$$

Dazu kommen die Grenzflächenbedingungen. Sei $F(r,t) = 0$ die Gleichung der Grenzfläche im ungestörten Zustand, $F(r,t) + f(r,t) = 0$ im gestörten Zustand, so ergibt sich, wie hier ebenfalls unter

Hinweis auf die zitierte Arbeit von V. Bjerknes direkt hingeschrieben werden kann,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)f+\mathfrak{v}\cdot\nabla F=0;\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+U'\frac{\partial}{\partial x}\right)f+\mathfrak{v}'\cdot\nabla F=0, \tag{7}$$

oder wenn man die Gleichung der Grenzfläche in der Form

$$P-P'+p-p'=0 \tag{8}$$

verwendet,

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)(p-p')+\mathfrak{v}\cdot\nabla(P-P')=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+U'\frac{\partial}{\partial x}\right)(p-p')+\mathfrak{v}'\cdot\nabla(P-P')=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

An der freien Oberfläche lautet die Grenzflächenbedingung entsprechend (1, 5) bzw. (1, 5a)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)f+\mathfrak{v}\cdot\nabla F=0, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)p+\mathfrak{v}\cdot\nabla P=0, \tag{10a}$$

wenn als Gleichung der freien Oberfläche angesetzt wird

$$P+p=0; \tag{8a}$$

ferner an einer starren Grenzfläche entsprechend (1, 6)

$$\mathfrak{v}\cdot\nabla F=0, \tag{11}$$

da ja die starre untere Grenzfläche keine Störungen erleidet. In sämtlichen Ausdrücken der Gleichungen (7)—(9) hat man eigentlich die Ortskoordinaten an der gestörten Grenzfläche einzusetzen. Doch begeht man nur einen Fehler höherer Ordnung, wenn man in den Störungsgrößen statt dessen die Ortskoordinaten der ungestörten Grenzfläche einsetzt, da sich ja gestörte und ungestörte Lage der Grenzfläche wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Störungen nur um kleine Beträge voneinander entfernen können.

Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}=\frac{D}{Dt}$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}=-\frac{\gamma}{Q}\left(\frac{Dp}{Dt}-wgQ\right). \tag{12}$$

Die Divergenz der Geschwindigkeit verschwindet also, wie es sein muß, im inkompressiblen Fall ($\gamma=0$), im kompressiblen Fall nur, wenn

$$\frac{Dp}{Dt}=gQw.$$

Bilden wir aus (4) die Rotation, von der ja nur die $y$-Komponente vorhanden ist, da wir uns auf die $xz$-Ebene beschränken, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$(13) \quad \frac{D}{Dt}(\mathrm{rot}_y \mathfrak{v}) + (U' + 2\,\Omega_y)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v} + wU'' + \frac{g}{Q}(\Gamma - \gamma)\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Die Wirbeländerung der Störungsbewegung hängt also teils mit der Windänderung mit der Höhe ($U'$, $U''$), teils mit der Erdrotation, teils mit Schichtung und Zustandsänderung zusammen. Im barotropen Fall verschwindet dieser letzte Anteil. Ein Vergleich der Formel (13) mit dem Bjerknes'schen Zirkulationssatz (V. Bjerknes 1921) ist nicht ohne weiteres zulässig, da ja in (13) $\mathfrak{v}$ nur der Störungsbetrag der Strömungsgeschwindigkeit ist.

## § 3. Zurückführung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

Vom mathematischen Standpunkt aus ist das wichtigste Resultat der Einführung des Störungsprinzips die Erlangung linearer, homogener Differentialgleichungen. Das ganze System lautet, noch einmal in Komponentendarstellung hingeschrieben, wobei (2, 5) und (2, 6) etwas umgeändert sind,

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} + w(U' + 2\,\Omega_y) + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{Dw}{Dt} - 2\,\Omega_y u + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{q}{Q}g = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{Dq}{Dt} + Q\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - g\Gamma Q w = 0$$

$$(3) \quad Q\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \gamma\frac{Dp}{Dt} - wgQ\gamma = 0.$$

Wir setzen an

$$(4) \quad \begin{cases} u = A(z)e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w = C(z)e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p = D(z)e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ q = E(z)e^{i(\alpha x - \beta t)}, \end{cases}$$

das ist eine längs der $x$-Achse fortschreitende periodische Störung. Die Amplituden $A$, $C$, $D$, $E$ der Störungsgrößen müssen wir als von $z$ abhängig ansehen, da die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems Funktionen von $z$ sind. $\alpha$ und $\beta$ sind Konstante, und zwar ist $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, $\beta = \frac{2\pi}{T}$, wo $L$ die Wellenlänge, $T$ die Periodenlänge ist. $v^* = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{L}{T}$ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenstörung.

Anschaulicher wäre es gewesen, statt der $e$-Funktionen komplexen Argumentes die trigonometrischen Funktionen zu wählen, doch werden die Rechnungen dadurch weniger bequem. In den Lösungen ist wegen der bekannten Superpositionseigenschaft der linearen, homogenen Differentialgleichungen für die $e$-Funktionen eine lineare reelle Kombination ihrer Real- und Imaginärteile zu setzen, oder auch nur Real- oder Imaginärteil, um die physikalische Diskussion der Lösung durchzuführen.

Durch Einsetzen von (4) in (1)—(3) erhalten wir folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Störungsamplituden

$$\left.\begin{aligned} -i(\beta-\alpha U)A+(U'+2\,\Omega_y)C+\frac{i\alpha}{Q}D &= 0\\ -i(\beta-\alpha U)C-2\,\Omega_y A+\frac{D'}{Q}+\frac{E}{Q}g &= 0\\ -i(\beta-\alpha U)E+i\alpha A Q+QC'-g\Gamma' QC &= 0\\ i\alpha QA+QC'-i\gamma(\beta-\alpha U)D-g\gamma QC &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{a})$$

Daraus ergibt sich durch weitere Elimination als Differentialgleichung für $C$

$$\left.\begin{aligned} &C''-\left(g\Gamma+\frac{2\gamma\alpha U'(\beta-\alpha U)-\gamma'(\beta-\alpha U)^2}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\right)C'+\\ &+\Bigg\{-\alpha^2+\gamma(\beta-\alpha U)^2-4\,\Omega_y^2\gamma+g\alpha(U'+2\,\Omega_y)\frac{2\gamma-\Gamma}{\beta-\alpha U}+\\ &+g^2\frac{\Gamma-\gamma}{(\beta-\alpha U)^2}\alpha^2+\frac{\alpha U''}{\beta-\alpha U}-\gamma' g-\\ &-\frac{\gamma'\alpha(\beta-\alpha U)(U'+2\,\Omega_y)+\gamma\gamma' g(\beta-\alpha U)^2}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}-\\ &-\frac{2\gamma\alpha^2U'(U'+2\,\Omega_y)-2\gamma^2(\beta-\alpha U)g\alpha U'}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\Bigg\}C=0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Hat man hieraus $C$ bestimmt, so ist

$$D=i\,\frac{\alpha(U'+2\,\Omega_y)-\gamma g(\beta-\alpha U)}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\,QC+i\,\frac{\beta-\alpha U}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\,QC' \qquad (6)$$

$$A=i\gamma\,\frac{(U'+2\,\Omega_y)(\beta-\alpha U)-\alpha g}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\,C+i\,\frac{\alpha}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\,C' \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{E}{Q}=i\,&\frac{\alpha\gamma(\beta-\alpha U)(U'+2\,\Omega_y)+g(\Gamma-\gamma)\alpha^2-g\gamma\Gamma(\beta-\alpha U)^2}{(\beta-\alpha U)[\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2]}\,C\\ &+i\,\frac{\gamma(\beta-\alpha U)}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\,C'. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Falls der Wind sich mit der Höhe nicht ändert, lautet die Differentialgleichung für $C$

$$(5a)\quad \begin{cases} C'' - \left(g\Gamma - \gamma' \dfrac{(\beta - \alpha U)^2}{\alpha^2 - \gamma(\beta - \alpha U)^2}\right) C' + \Big\{ -\alpha^2 + \gamma(\beta - \alpha U)^2 - 4\,\Omega_y^2 \gamma + \\ \quad + 2\,\Omega_y \alpha g \dfrac{2\gamma - \Gamma}{\beta - \alpha U} + g^2 \dfrac{\Gamma - \gamma}{(\beta - \alpha U)^2} \alpha^2 - \gamma' g - \\ \quad - \dfrac{2\,\Omega_y \alpha + \gamma g (\beta - \alpha U)}{\alpha^2 - \gamma(\beta - \alpha U)^2} \gamma' (\beta - \alpha U) \Big\} C = 0. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung für $C$ läßt sich in verschiedener Weise umformen, etwa so, daß das Glied mit $C'$ verschwindet, oder in eine Differentialgleichung erster Ordnung, allerdings 2. Grades (verallgemeinerte Riccatische Gleichung). Welche von diesen Formen im Einzelfall bequemer zu behandeln ist, und ob man etwa zweckmäßigerweise durch andere Eliminationen die Differentialgleichung für eine andere Störungsamplitude ableitet, muß von Fall zu Fall entschieden werden. Wir behalten im folgenden die obige Form bei und geben auch die verschiedenen Umformungen hier nicht wieder.

Um über den weiteren Verlauf der Rechnung, insbesondere die Verwendung der Grenzbedingungen zu orientieren, nehmen wir für einen Augenblick an, daß eine einzige Flüssigkeitsschicht mit starrer unterer Grenze in $z = 0$ und freier, im ungestörten Zustand horizontaler, Oberfläche in $z = h$ gegeben sei. Aus Differentialgleichung (5) sei $C$ bestimmt in der Form

$$(9)\qquad C(z) = K_1 C_1(z) + K_2 C_2(z),$$

wo $K_1$ und $K_2$ vorderhand noch ganz willkürliche Konstanten sind. Aus (2, 11) folgt Verschwinden der Normalkomponente der Störungsgeschwindigkeit in $z = 0$, also

$$w_{z=0} = 0 \qquad \text{oder} \qquad K_1 C_1(0) = -K_2 C_2(0),$$

so daß wir schreiben können

$$(10)\qquad C(z) = K[C_2(0) C_1(z) - C_1(0) C_2(z)],$$

wo $K$ eine neue Konstante ist.

Nach (6) ergibt sich dann für die Druckamplitude

$$(11)\quad \begin{cases} D = i \dfrac{KQ}{\alpha^2 - \gamma(\beta - \alpha U)^2} \Big\{ \big[\alpha(U' + 2\,\Omega_y) - \gamma g (\beta - \alpha U)\big] \big[C_2(0) C_1(z) - C_1(0) C_2(z)\big] + \\ \qquad + (\beta - \alpha U) \big[C_2(0) C_1'(z) - C_1(0) C_2'(z)\big] \Big\}. \end{cases}$$

Der Druck der ungestörten Bewegung in der Umgebung der freien Oberfläche ist

$$P-P_h = -g\left[\int_0^z Q\,dz - \int_0^h Q\,dz\right] = -g\int_h^z Q\,dz, \qquad (12)[1]$$

wo $P_h$ den Druck in der Höhe $h$, das ist an der ungestörten freien Oberfläche, bezeichnet. Für genügend kleine Entfernung von der freien Oberfläche gilt die Entwicklung

$$\left.\begin{aligned} Q(z) &= Q_h + (z-h)\left(\frac{dQ}{dz}\right)_h + \ldots = \\ &= Q_h[1-\Gamma_h g(z-h)] + \text{Glieder höherer Ordnung.}\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Also ergibt sich für $\frac{dP}{dz}$ in genügend kleiner Umgebung der ungestörten freien Oberfläche

$$\frac{dP}{dz} = -g\,Q = -g\,Q_h[1-\Gamma_h g(z-h)]. \qquad (14)$$

Als Grenzbedingung an der freien Oberfläche ergibt sich nach (2, 10a)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_h\frac{\partial}{\partial x}\right)p_{z=h} + w_{z=h}\cdot\frac{dP}{dz} = 0.$$

Hieraus folgt nach Abspaltung des Periodenfaktors $e^{i(\alpha x-\beta t)}$ und der Konstanten $K$

$$\left.\begin{aligned} &[C_2(0)\,C_1(h) - C_1(0)\,C_2(h)]\left\{1 - \frac{\alpha(U'+2\,\Omega_y) - \gamma_h g(\beta-\alpha U_h)}{\alpha^2-\gamma_h(\beta-\alpha U_h)^2}\,\frac{\beta-\alpha U_h}{g}\right\} \\ &\quad - \frac{(\beta-\alpha U_h)^2}{g[\alpha^2-\gamma_h(\beta-\alpha U_h)^2]}\,[C_2(0)\,C_1'(h) - C_1(0)\,C_2'(h)] = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Diese Gleichung liefert eine Relation zwischen $\alpha$ und $\beta$, also zwischen Wellenlänge und Periodendauer. Wir werden sie wie H. Solberg 1928 „Frequenzengleichung" nennen. Die Aufstellung und Diskussion dieser Gleichungen in den betrachteten Einzelfällen wird das Hauptziel unserer Arbeit darstellen.

Die Integration der Gleichung (5) ist nur in wenigen Fällen durch elementare Funktionen möglich. Hier soll der Fall einer Flüssigkeit mit konstanter Grundströmung und mit der Höhe exponentiell abnehmender Dichte (Isothermie) behandelt werden, ferner der Fall einer homogenen Flüssigkeit, deren Grundströmung eine lineare Funktion der Höhe $z$ ist. In diesen Fällen hat (5) konstante Koeffizienten. Weiterhin werden wir das Problem im nächsten Abschnitt noch dahin spezialisieren, daß wir die Flüssigkeit zwar geschichtet aber inkompressibel annehmen und von der Erdrotation absehen.

---

[1]) Die Indizes geben an, welcher Wert für $z$ in die betreffende Veränderliche einzusetzen ist.

# Abschnitt II.

# Wellenbewegungen einer inkompressiblen Flüssigkeit mit exponentiell mit der Höhe abnehmender Dichte.

## § 4. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Wir setzen nach den am Schluß des vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen für den vorliegenden Fall in (3, 1—3) $\Omega_y$ und $\gamma$ gleich Null und sehen $U$ als konstant an. Ferner wollen wir statt $\Gamma$ wieder schreiben $-\frac{1}{g}\cdot\frac{Q'}{Q}$. Dann erhalten wir

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{Du}{Dt}+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \dfrac{Dw}{Dt}+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial p}{\partial z}+g\dfrac{q}{Q}=0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{Dq}{Dt}+wQ'=0,$$

$$(3)\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Es sei noch besonders hervorgehoben, daß $q$, die Störungsgröße der Dichte in einer inkompressiblen Flüssigkeit, nicht verschwindet bei Eulerschen Behandlung des Problems, da man ja hier die einzelne Stelle des Raumes betrachtet. Dagegen verschwindet natürlich bei einer inkompressiblen Flüssigkeit die Störungsdichte im Falle Lagrangescher Behandlung des Problems, da dann das einzelne Teilchen beobachtet wird. Hierin liegt einer der Vorteile der Lagrangeschen Methode.

(3) legt die Einführung einer Stromfunktion $\psi$ nahe, so daß

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial z};\qquad w=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Die Differentialgleichung der „Amplitude" von $\psi$ werden wir in diesem Abschnitt zum Ausgang der Untersuchungen machen. Wir setzen ähnlich wie früher an

$$(4)\quad \begin{cases} \psi=\Psi(z)e^{i(\alpha x-\beta t)}, \\ p=D(z)e^{i(\alpha x-\beta t)}, \\ q=E(z)\,e^{i(\alpha x-\beta t)}, \end{cases}$$

also

$$u=-\Psi'(z)e^{i(\alpha x-\beta t)},$$
$$w=i\alpha\Psi(z)e^{i(\alpha x-\beta t)}.$$

Damit erhalten wir durch Einsetzen in (1)—(3) in bekannter Weise als Differentialgleichung für $\Psi$

$$\Psi'' + \frac{Q'}{Q}\Psi' - \left[\alpha^2 + g\frac{Q'}{Q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha U}\right)^2\right]\Psi = 0. \tag{5}$$

Im Anschluß an diese Gleichung (5) läßt sich gleich eine Aussage über die Rotationsbewegung machen. Es ist wegen der Konstanz der Grundströmung $U$ die gesamte Rotationsgeschwindigkeit $\eta$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -(\Psi'' - \alpha^2\Psi)e^{i(\alpha x-\beta t)}.$$

Im Falle, daß $Q' = 0$ ist, daß also eine homogene Flüssigkeit gegeben ist, verschwindet nach (5) $\eta$. Da wir es dann mit einer barotropen Flüssigkeit zu tun haben, stellt dieser Sachverhalt einen Spezialfall des Bjerknes'schen Zirkulationssatzes dar.

Nachdem aus (5) $\Psi$ bestimmt ist, ergeben sich.

$$D = -Q\frac{\beta-\alpha U}{\alpha}\Psi', \tag{6}$$

$$E = \frac{\alpha}{\beta-\alpha U}Q'\Psi. \tag{7}$$

Führen wir nun die Voraussetzung exponentiell abnehmender Dichte ein durch den Ansatz

$$Q = Q_0 e^{-\varkappa z},$$

wo $Q_0$ die Dichte in $z = 0$, $\varkappa$ eine Konstante ist, die, wie man leicht einsieht, im Falle einer isothermen Atmosphäre ist

$$\varkappa = \frac{g}{RT},$$

mit $R$ als Gaskonstante der Luft und $T$ als Temperatur. Dann ergibt sich als allgemeines Integral der Differentialgleichung (5)

$$\Psi = e^{\frac{\varkappa}{2}z}\left(K_1 e^{Nz} + K_2 e^{-Nz}\right) \tag{8}$$

mit

$$N^2 = \frac{\varkappa^2}{4} + \alpha^2 - g\varkappa\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha U}\right)^2$$

und $K_1$ und $K_2$ als willkürliche Konstanten.

Im Fall $N^2 = 0$, d. h. $\left(\frac{\beta-\alpha U}{\alpha}\right)^2 = \frac{g\varkappa}{\frac{\varkappa^2}{4}+\alpha^2}$, hat die Stromfunktion nach bekannten Regeln die Form

$$\Psi = e^{\frac{\varkappa}{2}z}(K_1 + K_2 z).$$

Wir wollen aber im folgenden diesen Spezialfall, der für lange Wellen auf die doppelte Newtonsche Schallgeschwindigkeit führt, nicht behandeln.

Wichtig ist dagegen, daß für

$$\left(\frac{\beta-\alpha U}{\alpha}\right) < \frac{g\varkappa}{\frac{\varkappa^2}{4}+\alpha^2}.$$

$N^2 > 0$, also $N = i N'$ rein imaginär wird. Man könnte zwar angeben, für welche Werte von $\beta$ bei Annahmen über die Wellenlänge und den Dichteaufbau des Mediums diese Bedingung erfüllt ist. Doch hat das geringes Interesse, da ja die Beziehungen zwischen $\beta$ und $\alpha$ erst aus der Frequenzgleichung bestimmt werden. Aber es ist festzuhalten, daß $N$ imaginär werden kann. Somit können die hyperbolischen Funktionen, die, wie wir sehen werden, in den Frequenzengleichungen auftreten, in trigonometrische übergehen.

Mit (8) ist zunächst die Gleichung der Stromlinien

$$\psi = \Psi(z)\, e^{i(\alpha x-\beta t)} = \text{const}$$

bekannt. Die vorstehende Gleichung zeigt, daß (auch bei ganz beliebiger vertikaler Dichteverteilung) die Gestalt der Stromlinien zeitlich unverändert bleibt, und nur die ganze Konfiguration sich mit der Geschwindigkeit $\frac{\beta}{\alpha}$ fortbewegt.

Für die übrigen Störungsgrößen ergibt sich aus (8), (6) und (7)

$$(9)\quad \begin{cases} u = -\left[\left(\frac{\varkappa}{2}+N\right)K_1 e^{Nz} + \left(\frac{\varkappa}{2}-N\right)K_2 e^{-Nz}\right] e^{\frac{\varkappa}{2}z} e^{i(\alpha x-\beta t)} \\ w = i\alpha\left(K_1 e^{Nz} + K_2 e^{-Nz}\right) e^{\frac{\varkappa}{2}z} e^{i(\alpha x-\beta t)} \\ p = -Q\frac{\beta-\alpha U}{\alpha}\left[\left(\frac{\varkappa}{2}+N\right)K_1 e^{Nz} + \left(\frac{\varkappa}{2}-N\right)K_2 e^{-Nz}\right] e^{\frac{\varkappa}{2}z} e^{i(\alpha x-\beta t)} \\ q = -\varkappa Q\frac{\alpha}{\beta-\alpha U}\left(K_1 e^{Nz} + K_2 e^{-Nz}\right) e^{\frac{\varkappa}{2}z} e^{i(\alpha x-\beta t)} \end{cases}$$

## § 5. Eine Schicht mit freier Oberfläche.

Nach (2, 11) muß an der starren unteren Grenzfläche $z = 0$ die Vertikalkomponente der Störungsgeschwindigkeit verschwinden, also sein

$$0 = w_{z=0} = i\alpha\Psi_{z=0}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}.$$

Das gibt mit Berücksichtigung von (4, 8)

$$K_1 = -K_2 = \frac{K}{2},$$

wo $K$ eine neue Konstante ist.

Die Gleichungen (4, 9) verwandeln sich also, wenn wir zunächst $N$ als reell voraussetzen, in

$$\left.\begin{aligned}
\psi &= K e^{\frac{\varkappa}{2} z} \mathfrak{Sin}\, N z\, e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
u &= -K\left(\frac{\varkappa}{2} \mathfrak{Sin}\, N z + N \mathfrak{Cof}\, N z\right) e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
w &= i \alpha K \mathfrak{Sin}\, N z\, e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
p &= -Q \frac{\beta - \alpha U}{\alpha} K\left(\frac{\varkappa}{2} \mathfrak{Sin}\, N z + N \mathfrak{Cof}\, N z\right) e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
q &= -\frac{\alpha}{\beta - \alpha U} \varkappa\, Q e^{\frac{\varkappa}{2} z} K \mathfrak{Sin}\, N z\, e^{i(\alpha x - \beta t)}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ist dagegen $N = i N'$ imaginär, so lauten die Ausdrücke für die Störungsgrößen

$$\left.\begin{aligned}
\psi &= i K e^{\frac{\varkappa}{2}} \sin N' z\, e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
u &= -i K\left(\frac{\varkappa}{2} \sin N' z + N' \cos N' z\right) e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
w &= -K \alpha \sin N' z\, e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
p &= -Q \frac{\beta - \alpha U}{\alpha} i K\left(\frac{\varkappa}{2} \sin N' z + N' \cos N' z\right) e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
q &= -\frac{\alpha}{\beta - \alpha U} \varkappa\, Q e^{\frac{\varkappa}{2} z} i K \sin N' z\, e^{i(\alpha x - \beta t)}.
\end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

Da über $K$ zunächst keine Vorschriften gemacht sind, kann man zweckmäßiger Weise in (1a) $iK$ als eine reelle Konstante ansehen. Mit (1) bzw. (1a) sind die Störungsgrößen bis auf eine willkürlich bleibende Konstante $K$ bestimmt. Im Fall (1a) treten unter Umständen neben dem Knoten an der unteren Grenzfläche noch andere Knotenlinien auf, in denen die Vertikalkomponente der Bewegung verschwindet.

Als weitere Relation tritt die Oberflächenbedingung hinzu. Diese wird uns eine Beziehung zwischen den noch willkürlich gebliebenen Größen $\beta$ und $\alpha$ geben (Frequenzengleichung). Die Gleichung der ungestörten Oberfläche heiße

$$z = h. \quad (2)$$

Für den ungestörten Druck in einer genügend kleinen Umgebung dieser Fläche gilt

$$P - P_h = -\frac{g Q_h}{\varkappa}\left[1 - e^{-\varkappa(z-h)}\right] = g Q_h (z - h) + \text{Glieder höherer Ordnung},$$

wobei durch den Index $h$ angedeutet wird, daß für die betreffenden Größen die Werte an der ungestörten Grenzfläche eingesetzt werden sollen. Schreibt man nun die Gleichung der freien Oberfläche in der früher erwähnten Form

$$P + p_{z=h} = \text{const}$$[1],

so ergibt sich mit obigem Wert für $P$ und der 4. Gleichung (1)

(3) $$z + Z e^{i(ax-\beta t)} - \text{const} = 0$$

mit

(4) $$Z = \frac{1}{g} \cdot \frac{\beta - aU}{a} K \left( \frac{\varkappa}{2} \mathfrak{Sin}\, Nh + N\, \mathfrak{Cof}\, Nh \right) e^{\frac{\varkappa}{2} h}.$$

Gleichung (3) ist die Gleichung der schwingenden Oberfläche, (4) der Ausdruck für ihre Amplitude. Wendet man auf (3) die Grenzflächenbedingung (2, 10) an, die jetzt lautet

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) f_h + w_h = 0,$$

so ergibt sich

(5) $$(\beta - aU)^2 \left( \frac{\varkappa}{2} + N\, \mathfrak{Ctg}\, Nh \right) - a^2 g = 0.$$

Das ist die Frequenzengleichung zwischen $\beta$ und $a$, die also transzendent ist. Wir werden uns, wie schon gesagt, im folgenden meist mit der Diskussion der Frequenzengleichungen begnügen, da das die Größen sind, die sich in der Physik der Hydrosphäre und Atmosphäre im allgemeinen am ehesten beobachten lassen. Hier wollen wir aber zunächst noch die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, die Orbitalbahnen, untersuchen.

Bezeichnen $\xi$ und $\zeta$ die Koordinaten einer bestimmten Flüssigkeitspartikel, so ist

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$w = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Durch Integration ergibt sich

$$\xi = -\frac{iK}{\beta - aU} \left( \frac{\varkappa}{2} \mathfrak{Sin}\, Nz + N\, \mathfrak{Cof}\, Nz \right) e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(ax-\beta t)} + \text{const},$$

$$\zeta = -\frac{a}{\beta - aU} K\, \mathfrak{Sin}\, Nz\, e^{\frac{\varkappa}{2} z} e^{i(ax-\beta t)} + \text{const}.$$

---

[1]) Dabei sei nochmals an die frühere Bemerkung erinnert, daß man nur Fehler höherer Ordnung begeht, wenn man in den Störungsgrößen die Werte der Koordinaten der ungestörten Grenzfläche einsetzt.

Aus (4) und (5) folgt

$$K = g \frac{\alpha}{\beta - \alpha U} \frac{Z e^{-\frac{\varkappa}{2} h}}{\frac{\varkappa}{2} \operatorname{Sin} Nh + N \operatorname{Cos} Nh} = \frac{\beta - \alpha U}{\alpha} \frac{e^{-\frac{\varkappa}{2} h}}{\operatorname{Sin} Nh} Z.$$

Setzt man das in die Ausdrücke für $\xi$ und $\zeta$ ein, so ergibt sich schließlich, wenn man nur die Realteile der komplexen Ausdrücke beibehält,

$$\left.\begin{aligned} \xi - \xi_0 &= \frac{\frac{\varkappa}{2} \operatorname{Sin} Nz + N \operatorname{Cos} Nz}{\alpha \operatorname{Sin} Nh} e^{-\frac{\varkappa}{2}(h-z)} Z \sin(\alpha x - \beta t) \\ \zeta - \zeta_0 &= \frac{\operatorname{Sin} Nz}{\operatorname{Sin} Nh} e^{-\frac{\varkappa}{2}(h-z)} Z \cos(\alpha x - \beta t). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die Gleichung der Orbitalbahnen lautet

$$\frac{(\xi - \xi_0)^2}{\left(\frac{\varkappa}{2} \operatorname{Sin} Nz + N \operatorname{Cos} Nz\right)^2} + \frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{\alpha^2 \operatorname{Sin}^2 Nz} = \frac{Z^2}{\alpha^2 \operatorname{Sin}^2 Nh} e^{-\varkappa(h-z)}. \qquad (7)$$

Für imaginäre $N$ sind in diesen Formeln wieder überall die hyperbolischen durch die trigonometrischen Funktionen zu ersetzen. Für $\varkappa = 0$, d. i. homogene Schichtung[1], geht (7) in eine entsprechende, von **Solberg** abgeleitete Formel über [cf. **Solberg** 1928, S. 42 (10)]. Die Orbitalbahnen sind Ellipsen, wenn man davon absieht, daß $z$ sich ja mit $\xi$ und $\zeta$ ändert, was aber nur Abweichungen höherer Ordnung nach sich zieht. Am größten sind die Strömungsellipsen, wie man (7) ohne weiteres entnimmt, an der Oberfläche, was ja auch aus der Theorie homogener Flüssigkeitswellen bekannt ist. Am Boden sind die Orbitalbahnen, wie ebenfalls zu erwarten war, horizontale Geraden. Die halbe kleine Achse ist an der freien Oberfläche bei inhomogenen und homogenen Flüssigkeiten gleich groß.

Nach diesen Bemerkungen über die Bewegungen der einzelnen Teilchen, für deren Diskussion natürlich die Anwendung der **Lagrange**schen Gleichungen eigentlich zweckmäßiger ist, wenden wir uns zur Frequenzgleichung (5). Da die Berücksichtigung der Grundströmung hier nur auf Hinzufügung einer Translationsbewegung zur Bewegung des flüssigen Systems hinausläuft, setzen wir $U = 0$. Alle Angaben über die Wellengeschwindigkeit beziehen sich dann auf ein mit der Grundströmung starr mitbewegtes System von Koordinanten.

---

[1]) In diesem Fall kann $N = \alpha$ nicht imaginär werden.

Im Falle einer homogenen Schicht ($\varkappa = 0$) ergibt sich aus (5) die in der Einleitung erwähnte Formel

$$(8) \qquad v^{*2} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{gL}{2\pi} \mathfrak{Tg}\, 2\pi \frac{h}{L},$$

wobei $L = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Wellenlänge bezeichnet. Da $\lim\limits_{x \to \infty} \mathfrak{Tg}\, x = 1$, ergibt sich, wenn die Wassertiefe groß gegen die Wellenlänge ist, die bekannte Stokes'sche Formel

$$(8\text{a}) \qquad v^* = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}.$$

Man spricht in diesem Falle bekanntlich von „Wellen auf tiefem Wasser", was, wie in der Einleitung bemerkt, etwas irreführend ist, da (8a) bereits bis auf 1 % Genauigkeit erfüllt ist, wenn $h \geqq 0{,}42$ ist. Für genügend kleine Werte von $2\pi \frac{h}{L}$ ist wegen $\lim\limits_{x=0} \mathfrak{Tg} x = x \pm \ldots$

$$(8\text{b}) \qquad v^* = \sqrt{gh}.$$

Das ist die Lagrangesche Formel für lange Wellen auf relativ seichtem Wasser. Damit (8b) bis auf ca. 1 % richtig ist, muß ungefähr $h \leqq 0{,}04\, L$ sein.

In unserem Falle liegt eine transzendente Gleichung für $v^*$ vor, da $v^*$ ja auch in $N$ enthalten ist. Wir wollen (5) nicht ausführlich diskutieren, aber doch wenigstens den Weg dazu andeuten. Wir schreiben

$$(5\text{a}) \qquad \mathfrak{Tg}\, Nh = \frac{Nh}{\left(\frac{g}{v^{*2}} - \frac{\varkappa}{2}\right) h}$$

und betrachten hierin neben den durch das spezielle Problem bestimmten Größen $\varkappa$, $h$ auch $v^*$ als gegeben und suchen $Nh$ und damit $\alpha$, also die Wellenlänge, zu bestimmen. Dabei wird zunächst zu untersuchen sein, ob unter den gemachten Annahmen $Nh$ reell oder imaginär sein muß. Im letzteren Falle hat man statt (5a)

$$(5\text{b}) \qquad \operatorname{tg} N'h = \frac{N'h}{\left(\frac{g}{v^{*2}} - \frac{\varkappa}{2}\right) h},$$

wo wieder $iN' = N$ gesetzt ist. Im Falle (5a) muß wegen

$$1 \geqq \frac{\mathfrak{Tg}\, Nh}{Nh} \geqq 0$$

gelten

$$\frac{g}{v^{*2}} > \frac{1}{h} + \frac{\varkappa}{2}.$$

Außerdem muß, da ja $N$ reell sein soll,

$$\frac{g\varkappa}{v^{*2}} < \frac{\varkappa^2}{4} + \alpha^2$$

sein. Beide Bedingungen vereinigt ergeben

$$\frac{\varkappa}{h} + \frac{\varkappa^2}{2} < \frac{g\varkappa}{v^{*2}} \frac{\varkappa^2}{4} + \alpha^2.$$

Für sehr tiefe Flüssigkeitsschichten gibt das als Bedingung für die Wellenlänge

$$L \leqq \frac{4\pi}{\varkappa}.$$

Durch eine ganz entsprechende Betrachtung ergibt sich als notwendige Bedingung für den Anwendungsbereich von (5b)

$$L \geqq \frac{4\pi}{\varkappa}.$$

In der Atmosphäre hat $\varkappa$ die Größenordnung $10^{-4}$. Da wir hier, so lange wir uns auf den Fall „tiefen Wassers" beschränken, Wellenlängen < 100 km voraussetzen werden, haben wir (5a) zu verwenden.

Bei geringer Tiefe der Flüssigkeitsschicht ist es gleichgültig, ob (5a) oder (5b) verwendet werden muß, da für kleine Argumente $x$ sowohl $\frac{\mathfrak{Tg}\, x}{x}$ als $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ nahezu gleich 1 wird.

Näher ist dieser Fall einer Flüssigkeitsschicht, freilich ohne numerische Angaben, bei Love 1891 durchdiskutiert worden.

Hier wollen wir uns auf die beiden Fälle beschränken, die der Stokes'schen (8a) und der Lagrangeschen (8b) Wellengeschwindigkeit entsprechen. Ist zunächst $h$ sehr groß, so wird aus (5)

$$v^* = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}. \tag{9}$$

Man erhält also wieder die Stokes'sche Formel. Diese Tatsache, daß in einer unendlich tiefen Flüssigkeit, gleichgültig, ob sie inhomogen oder homogen ist, bei der gleichen Wellenlänge Wellen derselben Geschwindigkeit möglich sind, ist wie erwähnt zuerst von Poisson 1816 bemerkt worden.

Ist die Wassertiefe genügend klein, so ergibt sich als Analogon zur Lagrangeschen Formel wegen $\lim\limits_{x=0} \mathfrak{Ctg}\, x = \frac{1}{x}$, bzw. $\lim\limits_{x=0} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x}$ aus (5)

$$v^* = \sqrt{\frac{gh}{1 + \frac{\varkappa}{2} h}}. \tag{10}$$

Die durch das Korrektionsglied $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varkappa}{2} h}}$ hervorgerufenen Abweichungen vom homogenen Fall sind bei den in Frage kommenden Werten der Dichteabnahme und Tiefe sehr gering.

Habe z. B. in einer Schicht von 2 m Mächtigkeit die obere freie Grenze die Dichte 1,05, die untere 1,18, so wird $\varkappa = 0{,}059$. Rechnen wir mit diesem Wert von $\varkappa$, trotzdem es sich hierbei um die sehr extremen Verhältnisse in der Oberflächenschicht des warmen Salzsees von Maros-Torda in Ungarn handelt, so gibt folgende kleine Tabelle ein Bild von den Abweichungen des inhomogenen vom homogenen Falle.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tiefe . . . . . | 5 m | 10 m | 20 m |
| $\sqrt{gh}$ . . . . . | 7 m/sec | 10 m/sec | 14 m/sec |
| $v^*$ . . . . . . . | 6,5 „ | 8,7 „ | 11 „ |

In weniger extremen Fällen sind die Abweichungen bei weitem nicht so groß. Z. B. beträgt im Philippinengraben die mittlere Oberflächendichte 1,0222, die Dichte in 9800 m Tiefe 1,07123[1]. Daraus folgt bei Annahme exponentieller Dichtezunahme $\varkappa = 0{,}478 \cdot 10^{-5}$. Damit erhält man als Geschwindigkeit sehr langer Wellen bei Annahme einer homogenen Wassermasse . . . 310 m/sec,

inhomogenen Wassermasse . . . 306 m/sec.

In einer Atmosphäre von $T = 273^0$ Temperatur ist $\varkappa = 1{,}249 \cdot 10^{-4}$. Nimmt man eine Luftschicht von $h = 1000$ m an, so ergibt sich als Geschwindigkeit langer Wellen bei

konstanter Dichte . . . . . . . . . . . . . . 99,2 m/sec,

exponentiell abnehmender Dichte . . . 97,7 m/sec.

Also in beiden Fällen sehr geringe Abweichungen. Immer wirkt das Vorhandensein einer Schichtung aber so, als ob die Höhe der Atmosphäre verkleinert würde. Wir können deshalb ähnlich wie Bartels 1927 eine äquivalente Höhe $\bar{h}$

$$\bar{h} = \frac{h}{1 + \frac{\varkappa}{2} h}$$

einführen. Dann wird (10) wieder formal identisch mit (8b).

Schließlich sei noch der Fall stationärer Wellen, $\beta = 0$, erwähnt. Als solche Gebilde sind z. B. die Wogenwolken anzusehen, von denen noch die Rede sein wird. Die Frequenzgleichung (5) verwandelt sich in diesem Falle in eine Gleichung zur Bestimmung von $a$, bzw. $L$ allein. Sie lautet

$$(11) \qquad U^2 \left( \frac{\varkappa}{2} + N \,\mathfrak{Ctg}\, N h \right) = g.$$

[1]) In dieser Dichtezunahme kommt zum großen Teil der Einfluß der Kompressibilität des Meerwassers zum Ausdruck. Wir wollen aber für diese Überschlagsrechnung von der Kompressibilität absehen und annehmen, daß die gesamte Dichteänderung auf Änderung der Zusammensetzung zurückzuführen ist.

Ist die Schicht homogen, so lautet die transzendente Gleichung zur Bestimmung von $a$

$$a \,\mathfrak{Ctg}\, a h = \frac{g}{U^2}.$$

Daraus ergibt sich bei Annahme einer sehr tiefen Schicht (wegen der Bedeutung dieser Aussage vergleiche oben)

$$a = \frac{g}{U^2}$$

oder

$$L = \frac{2\pi}{g} U^2. \tag{12}$$

Bei Annahme einer sehr flachen Schicht erhält man eine Relation zwischen der Schichthöhe und der konvektiven Geschwindigkeit, also keine stationären Wellen.

Entsprechend liegen die Verhältnisse im inhomogenen Fall. Für stationäre Wellen auf sehr tiefem Wasser ist die Wellenlänge

$$L = 2\pi \frac{U^2}{g}, \tag{12}$$

wie im homogenen Falle. Für Wellen auf seichtem Wasser liefert (11) ebenfalls wie im homogenen Fall keine Bestimmungsgleichung für die Wellenlänge $L$. Der allgemeinere Fall, wo das Verhältnis der Wassertiefe zur Wellenlänge nicht mehr unendlich groß ist, soll hier wegen seines geringen Interesses nicht näher untersucht werden. Über die Längen stationärer Wellen in tiefem Wasser bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten gibt folgende kleine Tabelle Auskunft.

Tabelle I.

Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Länge stationärer Wellen in einer unendlich tiefen Schicht.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $U$ | 5 m/sec | 10 m/sec | 15 m/sec | 20 m/sec |
| $L$ | 16 m | 64 m | 144 m | 256 m |

## § 6. Zwei Schichten zwischen starren Grenzflächen.

Die untere der beiden Schichten bezeichnen wir mit I, die obere mit II. Durch diese Indizes charakterisieren wir zugleich die zu jeder Schicht gehörenden Größen. Die (untere) starre Grenze der Schicht I habe die Gleichung $z = -h^{\mathrm{I}}$, die (obere) starre Grenze der Schicht II liegt in $z = h^{\mathrm{II}}$, die gemeinsame Grenzfläche habe im ungestörten Zustand die Gleichung $z = 0$,

An den beiden starren Grenzflächen müssen die Vertikalkomponenten der Störungsgeschwindigkeit verschwinden, also muß auch gelten

$$\Psi^{\mathrm{I}}_{z=-h^{\mathrm{I}}} = 0 \qquad \text{und} \qquad \Psi^{\mathrm{II}}_{z=h^{\mathrm{II}}} = 0$$

und, da die Konstanten für jedes System natürlich zunächst verschieden sein können,

$$K_1^{\mathrm{I}} e^{-N^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{I}}} + K_2^{\mathrm{I}} e^{N^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{I}}} = 0$$

und

$$K_1^{\mathrm{II}} e^{N^{\mathrm{II}} h^{\mathrm{II}}} + K_2^{\mathrm{II}} e^{-N^{\mathrm{II}} h^{\mathrm{II}}} = 0.$$

Führen wir für jede Schicht eine neue Konstante $K^{\mathrm{I}}$ und $K^{\mathrm{II}}$ ein, so muß nach den vorstehenden Gleichungen gelten

$$\frac{K^{\mathrm{I}}}{2} = K_1^{\mathrm{I}} e^{-N^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{I}}} = -K_2^{\mathrm{I}} e^{N^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{I}}}$$

und

$$\frac{K^{\mathrm{II}}}{2} = K_1^{\mathrm{II}} e^{N^{\mathrm{II}} h^{\mathrm{II}}} = -K_2^{\mathrm{II}} e^{-N^{\mathrm{II}} h^{\mathrm{II}}}.$$

Damit werden die Störungsgrößen für die beiden Systeme

$$(1)\left\{\begin{aligned}
\psi^{\mathrm{I}} &= K^{\mathrm{I}} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\, e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
u^{\mathrm{I}} &= -\frac{\partial \psi^{\mathrm{I}}}{\partial z} = -K^{\mathrm{I}}\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}}) + N^{\mathrm{I}} \mathfrak{Cof}\, N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\right] e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
w^{\mathrm{I}} &= \frac{\partial \psi^{\mathrm{I}}}{\partial x} = i\alpha K^{\mathrm{I}} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\, e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
p^{\mathrm{I}} &= -Q^{\mathrm{I}} \frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}{\alpha} K^{\mathrm{I}}\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}}) + N^{\mathrm{I}} \mathfrak{Cof}\, N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\right] e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
q^{\mathrm{I}} &= -\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}} Q^{\mathrm{I}} K^{\mathrm{I}} \varkappa^{\mathrm{I}} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\, e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
\psi^{\mathrm{II}} &= K^{\mathrm{II}} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\, e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
u^{\mathrm{II}} &= -\frac{\partial \psi^{\mathrm{II}}}{\partial z} = -K^{\mathrm{II}}\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}}) + N^{\mathrm{II}} \mathfrak{Cof}\, N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\right] e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
w^{\mathrm{II}} &= \frac{\partial \psi^{\mathrm{II}}}{\partial x} = i\alpha K^{\mathrm{II}} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\, e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
p^{\mathrm{II}} &= -\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha} Q^{\mathrm{II}} K^{\mathrm{II}}\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}}) + N^{\mathrm{II}} \mathfrak{Cof}\, N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\right] \times \\
&\qquad \times e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \\
q^{\mathrm{II}} &= -\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}} Q^{\mathrm{II}} K^{\mathrm{II}} \varkappa^{\mathrm{II}} \mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\, e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}.
\end{aligned}\right.$$

Zur Aufstellung der Frequenzengleichung brauchen wir die Grenzflächenbedingung an der gemeinsamen Grenzfläche beider Schichten. Da die Grenzfläche sich nur um geringe Beträge aus ihrer ungestörten Lage $z = 0$ entfernt, gilt für die Differenz der ungestörten

Drucke beiderseits der Grenzfläche in einer solchen gestörten Lage mit genügender Genauigkeit

$$P^{I} - P^{II} = -g\left(Q_0^{I} - Q_0^{II}\right) z.$$

Die o=Indizes deuten an, daß es sich um Werte an der Stelle $z = 0$ handelt[1]).

Denken wir uns nun die Gleichung der Grenzfläche in der Form (2, 8)

$$P^{I} - P^{II} + p^{I}_{z=0} - p^{II}_{z=0} = 0$$

geschrieben, so ergibt das mit Berücksichtigung von (1) nach kurzer Rechnung

$$z = Z e^{i(\alpha x - \beta t)}, \tag{2}$$

wo $Z$ die Amplitude der schwingenden Fläche ist

$$\left.\begin{aligned} Z = {} & \frac{Q_0^{I} \frac{\beta - \alpha U^{I}}{\alpha} K^{I}\left[\frac{\varkappa^{I}}{2} \operatorname{Sin} N^{I} h^{I} + N^{I} \operatorname{Cos} N^{I} h^{I}\right]}{g\left(Q_0^{I} - Q_0^{II}\right)} - \\ & - \frac{Q_0^{II} \frac{\beta - \alpha U^{II}}{\alpha} K^{II}\left[-\frac{\varkappa^{II}}{2} \operatorname{Sin} N^{II} h^{II} + N^{II} \operatorname{Cos} N^{II} h^{II}\right]}{g\left(Q_0^{I} - Q_0^{II}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wendet man auf (2) die Grenzflächenbedingung (2, 7)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{I,II} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{z=0} + w^{I,II}_{z=0} \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

an, so ergibt sich

$$K^{I} \operatorname{Sin} N^{I} h^{I} = -\frac{\beta - \alpha U^{I}}{\alpha} Z,$$

$$K^{II} \operatorname{Sin} N^{II} h^{II} = \frac{\beta - \alpha U^{II}}{\alpha} Z.$$

Statt der zwei Konstanten $K^{I}$ und $K^{II}$ hat man jetzt in dem ganzen System nur noch eine willkürliche Konstante $Z$, die Amplitude der schwingenden Grenzfläche, die in die Gleichung (1) einzuführen wäre.

Setzen wir in die rechte Seite von (3) die gewonnenen Ausdrücke für $K^{I}$ und $K^{II}$ ein, so hebt sich $Z$ fort, und wir erhalten als Frequenzgleichung:

$$\left.\begin{aligned} & Q_0^{I}\left\{\left(\frac{\beta - \alpha U^{I}}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\varkappa^{I}}{2} + N^{I} \operatorname{Ctg} N^{I} h^{I}\right) - g\right\} \\ & \quad = -Q_0^{II}\left\{\left(\frac{\beta - \alpha U^{II}}{\alpha}\right)^2 \left(N^{II} \operatorname{Ctg} N^{II} h^{II} - \frac{\varkappa^{II}}{2}\right) + g\right\}^{2)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1]) Z. B. bedeutet $Q_0^{II}$ die bevorzugte Dichte in der 2. Schicht, genommen an der Schichtgrenze.

[2]) Auch hier gilt wieder das früher über das Komplexwerden der Größen $N$ Gesagte.

Sind die Flüssigkeitsschichten in sich homogen, so vereinfacht sich (4) in

$$(4a) \quad Q_0^{\mathrm{I}}\left[\left(\frac{\beta - a U^{\mathrm{I}}}{a}\right)^2 a\,\mathfrak{Ctg}\,a h^{\mathrm{I}} - g\right] = - Q_0^{\mathrm{II}}\left[\left(\frac{\beta - a U^{\mathrm{II}}}{a}\right)^2 a\,\mathfrak{Ctg}\,a h^{\mathrm{II}} + g.\right.$$

Auf einen wesentlichen Unterschied der Gleichungen (4) und (4a) voneinander sei noch aufmerksam gemacht: Wenn der Dichtesprung verschwindet, $Q_0^{\mathrm{I}} = Q_0^{\mathrm{II}}$, so fällt in (4a) $g$ fort: es sind also keine Schwerewellen mehr möglich, was ja auch klar ist. In (4) dagegen tritt $g$ noch in dem Ausdruck für $N$ auf. Es sind also auch bei verschwindendem Dichtesprung in einer inhomogenen Flüssigkeit noch Schwerewellen möglich (vgl. § 16).

Mit dieser Feststellung erledigt sich auch der Einwand Exners gegen Defant 1926, wonach an der Stratosphärengrenze keine Gravitationswellen auftreten sollen, weil es sich hier weniger um einen Sprung der Temperatur als ihrer Änderung handelt. Wie aus dem soeben Gesagten hervorgeht, sind auch bei sprunghafter Änderung der vertikalen Temperatur- und damit der Dichteänderung Wellen möglich.

Aus (4) erhält man übrigens die Frequenzgleichung für die Wellenbewegung in einer Schicht mit freier Oberfläche, indem man $Q_0^{\mathrm{II}} = 0$ setzt.

Nimmt man an, daß sich beide Schichten nur durch den Exponenten $\varkappa$ der Dichteabnahme unterscheiden, also daß kein Geschwindigkeits- und Dichtesprung vorhanden ist, so erhält man im Fall unendlich tiefer Schichten aus (4) wieder die Stokes'sche Formel

$$v^* = \sqrt{\frac{g L}{2\pi}}.$$

Im Fall sehr flacher Schichten sind im allgemeinen überhaupt keine Wellen möglich, weil die Frequenzgleichung nur eine Relation zwischen den vier Größen $\varkappa$ und $h$ liefert, $v^*$ aber unbestimmt läßt.

Ist unter gleichen Voraussetzungen Schicht I unendlich tief, Schicht II sehr dünn, so folgt für die Wellengeschwindigkeit:

$$(5) \qquad v^{*2} = \frac{g \varkappa^{\mathrm{I}}}{a^2 - \frac{\varkappa^{\mathrm{II}\,2} - 2\varkappa^{\mathrm{I}}\varkappa^{\mathrm{II}}}{4} + \frac{\varkappa^{\mathrm{II}} - \varkappa^{\mathrm{I}}}{h^{\mathrm{II}}} - \frac{1}{h^{\mathrm{II}\,2}}}.$$

Es gehen also Wellenlänge und Schichtdicke $h^{\mathrm{II}}$ der dünnen Schicht in die Formel für die Wellengeschwindigkeit ein.

Genauer wollen wir noch den Fall zweier unendlich dicker Schichten behandeln. In diesem Falle verwandelt sich (4) in

$$(4b) \quad Q_0^{\mathrm{I}}\left\{\left(\frac{\beta - a U^{\mathrm{I}}}{a}\right)^2\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} + N^{\mathrm{I}}\right) - g\right\} = - Q_0^{\mathrm{II}}\left\{\left(\frac{\beta - a U^{\mathrm{II}}}{a}\right)^2\left(N^{\mathrm{II}} - \frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}\right) + g\right\}.$$

Wir wollen aber diese Gleichung nicht direkt nach $\beta$ oder $\alpha$ auflösen, was zwar möglich, aber sehr umständlich wäre, sondern nach Lamb 1911 diskutieren. Außerdem sehen wir der Einfachheit halber vom Windsprung ab, setzen also $U^{I} = U^{II} = 0$.

Wir beschäftigen uns also mit der Wellenbewegung in zwei unendlich ausgedehnten horizontalen Schichten, deren Dichten in beiden Schichten nach einem Exponentialgesetz sich ändern und an der gemeinsamen Grenzfläche einen Sprung aufweisen.

Da nach (4, 5) $\frac{\varkappa^{I}}{2} + N^{I}$ und $\frac{\varkappa^{II}}{2} - N^{II}$ Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 - \varkappa\lambda - \alpha^2 + g\varkappa\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 0 \tag{6}$$

sind, wollen wir die Frequenzengleichung mit Lamb schreiben,

$$\frac{Q_0^{I}}{\alpha^2}(\beta^2\lambda^{I} - \alpha^2 g) = \frac{Q_0^{II}}{\alpha^2}(\beta^2\lambda^{II} - \alpha^2 g).$$

Hierin sind also $\lambda^{I}$ und $\lambda^{II}$ die beiden Wurzeln der eben erwähnten quadratischen Gleichung in $\lambda$, wobei man für $\varkappa$ das eine Mal $\varkappa^{I}$, das andere Mal $\varkappa^{II}$ zu setzen hat. Weiter wollen wir annehmen, daß wir es mit Gasen zu tun haben. Dann gilt ja

$$\varkappa = \frac{g}{RT}; \qquad Q_0 = \frac{P_0}{RT} = \frac{P_0}{g}\varkappa,$$

und aus der Frequenzgleichung folgt

$$\varkappa^{I}(\beta^2\lambda^{I} - g\alpha^2) = \varkappa^{II}(\beta^2\lambda^{II} - g\alpha^2) = \mu \tag{7}$$

also

$$\lambda^{I} = \frac{\mu}{\beta^2\varkappa^{I}} + \frac{\alpha^2 g}{\beta^2} \quad \text{und} \quad \lambda^{II} = \frac{\mu}{\beta^2\varkappa^{II}} + \frac{\alpha^2 g}{\beta^2}.$$

In die Gleichungen für $\lambda$ eingesetzt ergibt das folgende beiden quadratischen Gleichungen für $\mu$

$$\left.\begin{aligned} &\mu^2 + \mu L^{I} + M^{I} = 0 \\ \text{und} \quad &\mu^2 + \mu L^{II} + M^{II} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

worin bedeuten

$$L^{I} = \varkappa^{I}(2\alpha^2 g - \beta^2\varkappa^{I}),$$
$$M^{I} = \alpha^2\varkappa^{I}(\alpha^2 g^2 - \beta^4);$$

entsprechende Gleichungen gelten für $L^{II}$ und $M^{II}$. Daraus folgt

$$\mu = -\frac{M^{I} - M^{II}}{L^{I} - L^{II}}$$

und somit

$$(M^{I} - M^{II})^2 + (L^{I} + L^{II})(L^{I}M^{II} - L^{II}M^{I}) = 0. \tag{9}$$

Nun ist

$$M^{\mathrm{I}}-M^{\mathrm{II}} = (a^2g^2-\beta^4)\,a^2\,(\varkappa^{\mathrm{I}2}-\varkappa^{\mathrm{II}2})$$

$$L^{\mathrm{I}}-L^{\mathrm{II}} = 2\,a^2 g\,(\varkappa^{\mathrm{I}}-\varkappa^{\mathrm{II}})-\beta^2(\varkappa^{\mathrm{I}2}-\varkappa^{\mathrm{II}2})$$

$$L^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{II}}-L^{\mathrm{II}}M^{\mathrm{I}} = a^2(a^2g^2-\beta^4)\,2\,a^2 g\,\varkappa^{\mathrm{I}}\varkappa^{\mathrm{II}}(\varkappa^{\mathrm{II}}-\varkappa^{\mathrm{I}}).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (9) ein, so ergibt sich zunächst

$$\beta^2 = ag$$

oder

$$v^* = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}.$$

Also nicht nur im Fall verschwindenden Dichtesprunges, sondern auch bei endlichem Dichtesprung gibt es in einem System von unendlich tiefen Flüssigkeitsschichten Wellen, die sich mit der Stokes'schen Geschwindigkeit fortbewegen in Übereinstimmung mit dem Poissonschen Resultat. Daneben gibt es aber noch andere Wellen, die eigentlichen Grenzflächenwellen, und diese interessieren uns weit mehr. Aus (9) erhält man als Frequenzengleichung nach Abspaltung der Stokes'schen Wellengeschwindigkeit

$$(10)\qquad \left(\frac{\beta^2}{ag}\right)^2 - 2\,\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}\varkappa^{\mathrm{II}}}{a(\varkappa^{\mathrm{I}}+\varkappa^{\mathrm{II}})}\left(\frac{\beta^2}{ag}\right) - \left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}-\varkappa^{\mathrm{II}}}{\varkappa^{\mathrm{I}}+\varkappa^{\mathrm{II}}}\right)^2 = 0.$$

Die gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen (8) ist

$$\mu = \frac{L^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{II}}-L^{\mathrm{II}}M^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{I}}-M^{\mathrm{II}}} = -\,2\,a^2 g\,\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}\varkappa^{\mathrm{II}}}{\varkappa^{\mathrm{I}}+\varkappa^{\mathrm{II}}}.$$

Damit wird

$$(11)\qquad \frac{\lambda^{\mathrm{I}}}{a} = \frac{ag}{\beta^2}\,\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}-\varkappa^{\mathrm{II}}}{\varkappa^{\mathrm{I}}+\varkappa^{\mathrm{II}}} = -\,\frac{\lambda^{\mathrm{II}}}{a}.$$

$\lambda$ ist der Koeffizient von $z$ in der Exponentialfunktion, die die Veränderung der Amplituden der Störungsgrößen mit der Höhe angibt. Für den Fall einer homogenen Flüssigkeit vereinfacht sich $\lambda$ in $a$. Insofern hat also die Angabe von $\frac{\lambda}{a}$ ein Interesse. Sie läßt erkennen, um wieviel mehr oder weniger die Störungsamplituden mit der Entfernung von der gemeinsamen Grenzfläche in einer inhomogenen Flüssigkeit abnehmen als in einer homogenen.

Sind beide Schichten homogen, so gilt, wie schon Stokes ausgerechnet hat (vgl. z. B. Lamb, Hydrodynamik, S. 435, Leipzig und Berlin 1907) und wie auch aus (4b) folgt, wenn man $\varkappa^{\mathrm{I}} = \varkappa^{\mathrm{II}} = 0$ setzt,

$$(12)^{1)}\qquad \bar{\beta}^2 = ag\,\frac{Q_0^{\mathrm{I}}-Q_0^{\mathrm{II}}}{Q_0^{\mathrm{I}}+Q_0^{\mathrm{II}}} = ag\,\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}-\varkappa^{\mathrm{II}}}{\varkappa^{\mathrm{I}}+\varkappa^{\mathrm{II}}} = 2\pi\,\frac{g}{L}\,\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}-\varkappa^{\mathrm{II}}}{\varkappa^{\mathrm{I}}+\varkappa^{\mathrm{II}}},$$

---

[1]) Hierin soll der Querstrich sich auf die Werte beziehen, die man bei Nichtberücksichtigung der vertikalen Dichteänderung erhält.

da ja

$$\frac{\varkappa^{I}-\varkappa^{II}}{\varkappa^{I}+\varkappa^{II}}=\frac{Q_0^{I}-Q_0^{II}}{Q_0^{I}+Q_0^{II}}=\frac{T^{II}-T^{I}}{T^{II}+T^{I}}.$$

In (10) setzen wir jetzt zur Abkürzung $x=\frac{\beta^2}{\alpha g}$, also

$$x=\frac{\varkappa^{I}\varkappa^{II}}{\alpha(\varkappa^{I}+\varkappa^{II})}+\sqrt{\frac{\varkappa^{I2}\varkappa^{II2}}{\alpha^2(\varkappa^{I}+\varkappa^{II})^2}+\left(\frac{\varkappa^{I}-\varkappa^{II}}{\varkappa^{I}+\varkappa^{II}}\right)^2}.$$

Den anderen Wert für $x$, der sehr klein ist, wollen wir nicht weiter beachten. Ferner ist mit dieser Abkürzung

$$\frac{\lambda^{I}}{\alpha}=-\frac{\lambda^{II}}{\alpha}=\frac{1}{x}\,\frac{\varkappa^{I}-\varkappa^{II}}{\varkappa^{I}+\varkappa^{II}}.$$

Wir setzen nun, um bestimmte Zahlenwerte zu bekommen,

$$\frac{\varkappa^{I}-\varkappa^{II}}{\varkappa^{I}+\varkappa^{II}}=\frac{T^{II}-T^{I}}{T^{II}+T^{I}}=\frac{1}{100},$$

was unter normalen Verhältnissen etwa einem Temperatursprung $5^0,5$ entspricht. Nehmen wir als Mitteltemperatur etwa $274^0$, so wird

$$\frac{\varkappa^{I}\varkappa^{II}}{\alpha(\varkappa^{I}+\varkappa^{II})}=0{,}00000992\ L.$$

Ferner ist

$$\beta^2:\bar{\beta}^2=v^{*2}:\bar{v}^{*2}=\frac{x}{\frac{\varkappa^{I}-\varkappa^{II}}{\varkappa^{I}+\varkappa^{II}}}=100\,x.$$

Mit diesen Angaben über die Zahlenrechnung wollen wir uns hier begnügen. In der nachstehenden Tabelle II (vgl. auch Figur 4, § 17) geht aus Spalte 2 bzw. 5 und 6 hervor, daß in Flüssigkeitsschichten mit nach oben abnehmender Dichte die Wellengeschwindigkeit mit der Wellenlänge viel stärker zunimmt als in homogenen Schichten. Spalte 3 zeigt, daß mit wachsender Wellenlänge die Störung immer größere Schichten erfaßt im Verhältnis zu dem Störungsbereich im Falle homogener Schichten. Man sollte freilich erwarten, daß die durch die Inhomogenität bewirkte stabilere Schichtung den Wirkungsbereich der Störung verkleinert. Daß das im vorliegenden Falle nicht zutrifft, liegt darin begründet, daß wir von der Wellenlänge als dem ursprünglich gegebenen ausgegangen sind. Tatsächlich ist es so, daß zu einer bestimmten Störung im inhomogenen Fall eine kleinere Wellenlänge gehört als im homogenen Fall. Umgekehrt muß natürlich dann eine und dieselbe Wellenlänge im inhomogenen Fall von einer größeren Störung, d. h. einer solchen, die Gebiete in größerer Entfernung von der Grenzfläche in Mitleidenschaft zieht, hervorgerufen sein als im homogenen Fall. Das bringt Spalte 3 von Tabelle II zum Ausdruck. Wir werden bei Behandlung der stationären Wellen noch einmal kurz darauf zurückkommen.

Tabelle II.
Wellengeschwindigkeiten an der Grenzfläche zweier unendlich tiefer, geschichteter Flüssigkeiten bei einem Temperatursprung von ca. 5,5°.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | $\frac{\beta}{\bar{\beta}}$ | $\frac{\lambda}{\alpha}$ | $T$ (Periodenlänge) | $v^*$ | $\bar{v}^*$ (Stokes) |
| 7,0 m | 1,003 | 0,994 | 21,2 sec | 0,33 m/sec | 0,33 m/sec |
| 34,8 „ | 1,017 | 0,968 | 46,4 „ | 0,75 „ | 0,74 „ |
| 69,2 „ | 1,034 | 0,935 | 64,4 „ | 1,07 „ | 1,04 „ |
| 200 „ | 1,104 | 0,822 | 102,8 „ | 1,94 „ | 1,77 „ |
| 436 „ | 1,233 | 0,658 | 135,5 „ | 3,22 „ | 2,61 „ |
| 597 „ | 1,323 | 0,571 | 148,0 „ | 4,03 „ | 3,05 „ |
| 1048 „ | 1,574 | 0,404 | 164,5 „ | 6,36 „ | 4,05 „ |
| 1745 „ | 1,932 | 0,268 | 173,2 „ | 10,05 „ | 5,22 „ |
| 2288 „ | 2,180 | 0,211 | 176,0 „ | 13,0 „ | 5,98 „ |
| 2740 „ | 2,371 | 0,178 | 177,0 „ | 15,5 „ | 6,55 „ |
| 3160 „ | 2,534 | 0,156 | 178,0 „ | 17,7 „ | 7,04 „ |
| 4650 „ | 3,055 | 0,107 | 179,0 „ | 26,0 „ | 8,53 „ |
| 6810 „ | 3,684 | 0,074 | 179,5 „ | 38,0 „ | 10,32 „ |
| 8450 „ | 4,099 | 0,060 | 180,0 „ | 47,0 „ | 11,5 „ |
| 9840 „ | 4,424 | 0,051 | 180,0 „ | 54,6 „ | 12,4 „ |
| 11020 „ | 4,679 | 0,046 | 180,0 „ | 61,3 „ | 13,1 „ |

Die auf den ersten Blick willkürlich verteilten Wellenlängen wurden gewählt, um den Vergleich mit Tabelle XII zu erleichtern, bei der nicht von den Wellenlängen, sondern von einer Hilfsgröße ausgegangen werden mußte.

## § 7. Vorläufige Bemerkungen zur Theorie der stationären Wellen (Luftwogen).

Zur Anwendung der abgeleiteten Formeln auf die Theorie der Luftwogen[1]) haben wir nur $\beta$ bzw. $v^*$ gleich o zu setzen, da diese Vorgänge als stationäre Wellen aufzufassen sind. Setzen wir in (6, 4) $\beta = 0$, so erhalten wir als Bestimmungsgleichung für $\alpha$, d. h. für die Wellenlänge

$$(1)\quad \begin{cases} -g\left(Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}}\right) + Q_0^{\mathrm{I}}\, U^{\mathrm{I}\,2}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} + N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{I}}\right) \\ \qquad + Q_0^{\mathrm{II}}\, U^{\mathrm{II}\,2}\left(-\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}} h^{\mathrm{II}}\right) = 0. \end{cases}$$

[1]) Vgl. H. v. Helmholtz 1889 und 1890. Von meteorologischer Seite besonders A. Wegener 1906 und 1908.

Im Falle, daß die Schichtdicke sehr gering ist gegen die Wellenlänge, verwandelt sich (1), wie man leicht übersieht, in eine Gleichung, die $a$ gar nicht enthält. Dieser Fall ist uninteressant. Am wichtigsten, weil den natürlichen Verhältnissen am besten entsprechend, ist der Fall unendlich tiefer Schichten, weil die Dicken der atmosphärischen Schichten im allgemeinen so groß sind, daß man $\mathfrak{Ctg}\, Nh = 1$ setzen kann.

In diesem Falle zweier unendlich tiefer Schichten wird aus (1)

$$-g\left(Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}}\right) + Q_0^{\mathrm{I}}\, U^{\mathrm{I}2}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} + N^{\mathrm{I}}\right) + Q_0^{\mathrm{II}}\, U^{\mathrm{II}2}\left(N^{\mathrm{II}} - \frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}\right) = 0. \quad (1\mathrm{a})$$

Nehmen wir zunächst Homogenität beider Schichten an ($\varkappa^{\mathrm{I}} = \varkappa^{\mathrm{II}} = 0$), so ergibt sich für die Wellenlänge die bekannte, bereits von Helmholtz 1890 abgeleitete Formel

$$L = \frac{2\pi}{g}\,\frac{U^{\mathrm{I}2} Q_0^{\mathrm{I}} + U^{\mathrm{II}2} Q_0^{\mathrm{II}}}{Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}}}. \quad (2)$$

Im Fall inhomogener Schichten ergibt sich aus (1a) durch längere Rechnung, wenn zur Abkürzung $\frac{Q_0^{\mathrm{I}}}{Q_0^{\mathrm{II}}} = s$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} a^2 = {} & \left[g(s-1) - s\,U^{\mathrm{I}2}\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} + U^{\mathrm{II}2}\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}\right]^2 \frac{s^2 U^{\mathrm{I}4} + U^{\mathrm{II}4}}{(s^2 U^{\mathrm{I}4} - U^{\mathrm{II}4})^2} \\ & \frac{s^2 U^{\mathrm{I}4}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}2}}{4} - \frac{g\varkappa^{\mathrm{I}}}{U^{\mathrm{I}2}}\right) - U^{\mathrm{II}4} - \left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}2}}{4}\,\frac{g\varkappa^{\mathrm{II}}}{U^{\mathrm{II}2}}\right)}{s\,U^{\mathrm{I}4} - U^{\mathrm{II}4}} \pm 2s\,U^{\mathrm{I}2} U^{\mathrm{II}2}\,\frac{g(s-1) - U^{\mathrm{I}2} s\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} + U^{\mathrm{II}2}\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}}{(s^2 U^{\mathrm{I}4} - U^{\mathrm{II}4})^2} \times \\ & \times \sqrt{\left[g(s-1) - s\,U^{\mathrm{I}2}\frac{\varkappa^{\mathrm{I}2}}{2} + U^{\mathrm{II}2}\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}\right]^2 + (s^2 U^{\mathrm{I}4} - U^{\mathrm{II}4})\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}2}}{4} - \frac{g\varkappa^{\mathrm{II}}}{U^{\mathrm{II}}}\right) - \left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}2}}{4} - \frac{g\varkappa^{\mathrm{I}}}{U^{\mathrm{I}2}}\right)}. \end{aligned}\right\} (3)$$

Verschwindet etwa die Grundströmung der oberen Schicht $U^{\mathrm{II}}$, so vereinfacht sich (3) in

$$a^2 = \frac{g^2(s-1)^2 + g\,s\,U^{\mathrm{I}2}\varkappa^{\mathrm{I}}}{s^2\,U^{\mathrm{I}4}}. \quad (3\mathrm{a})$$

Um den entsprechenden homogenen Fall zu erhalten, setzen wir $\varkappa^2 = 0$. Dann ist (wir bezeichnen für einen Augenblick den Fall homogener Schichtung durch überstrichene Buchstaben)

$$\bar{a} = \frac{2\pi}{\bar{L}} = \frac{g(s-1)}{s\,U^{\mathrm{I}2}},$$

wie man auch direkt aus (2) findet. Wir können also schreiben

$$L = \bar{L}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s\,U^{\mathrm{I}2}\varkappa^{\mathrm{I}}}{g(s-1)^2}}} \quad \text{mit} \quad \bar{L} = 2\pi\,\frac{U^{\mathrm{I}2} Q_0^{\mathrm{I}}}{g(Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}})} \quad (3\mathrm{b})$$

[1]) Die Ableitungen aus den Störungsgleichungen ist wohl erstmalig von V. Bjerknes gegeben, aber nicht veröffentlicht worden.

Eine (3b) vollkommen entsprechende Formel gilt auch, wenn die Grundströmung in der unteren Schicht allein verschwindet. Natürlich sind dann die Indizes I durch II zu ersetzen.

Um ein Beispiel für den Einfluß der Schichtung auf die Wellenlänge zu gewinnen, nehmen wir an

$$U^{\mathrm{I}} = 5 \text{ m/sec} \qquad U^{\mathrm{II}} = 0$$

$$s = \frac{Q_0^{\mathrm{I}}}{Q_0^{\mathrm{II}}} = \frac{T^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{I}}} = \frac{278}{273} = 1{,}0183$$

$$\varkappa^{\mathrm{I}} = \frac{g}{R\,T^{\mathrm{I}}} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}.$$

Damit ergibt sich im Falle homogener Schichtung $\bar{L} = 892$ m
inhomogener Schichtung $L = 534$ m.

Wir sehen hieraus, und wir werden später aus einer ganzen Reihe anderer Beispiele noch sehen, daß unter sonst gleichen Umständen im inhomogenen Fall die Wellenlänge kürzer ist als im Fall homogener Flüssigkeit. Das ist natürlich auf die im ersten Falle stabilere Schichtung zurückzuführen.

Im allgemeinen Falle nicht verschwindender Grundströmungen in beiden Schichten liegen die Dinge in der Praxis, d. h. bei der Beobachtung von Wogenwolken, gewöhnlich so, daß man zwar den Windsprung[1]) kennt, aber nicht die Teilbeträge $U^{\mathrm{I}}$ und $U^{\mathrm{II}}$. Deshalb hat A. Wegener 1906 angesetzt

$$\frac{v}{2} = |U^{\mathrm{I}}| = |U^{\mathrm{II}}| = U,$$

d. h. er hat den beobachteten Geschwindigkeitssprung $v$ gleichmäßig auf beide Schichten verteilt. Wir wollen in (3) außerdem noch $\varkappa^{\mathrm{I}} = \varkappa^{\mathrm{II}} = \varkappa$ ansetzen, da sich beide Größen nur wenig von einander unterscheiden. Damit wird (3)

$$a^2 = \left(\frac{g}{U^2} - \frac{\varkappa}{2}\right)^2 \frac{(s \pm 1)^2}{(s + 1)^2} + \frac{g}{U^2}\varkappa - \frac{\varkappa^2}{4}.$$

Hieraus ergibt sich zunächst

(5, 12) $$L_1 = 2\pi \frac{U^2}{g} = \frac{\pi}{2}\frac{v^2}{g},$$

d. h. die gleiche Wellenlänge wie im Fall stationärer Oberflächenwellen auf einer unendlich tiefen Schicht. Man erhält sie aus dem allgemeinen Fall einer inneren Grenzschicht, indem man die Dichte

[1]) Hierbei ist noch zu beachten, daß die beiden Winde im allgemeinen einander nicht parallel gehen. Infolgedessen kommt nicht der absolute Betrag der Winddifferenz, sondern die geometrische Differenz in Frage. Senkrecht zu dieser werden aach die Wogen aufgeworfen. A. Wegener 1906 gab eine überschlägige Formulierung dieser Probleme. Eine genaue Behandlung soll anderwärts veröffentlicht werde.

der oberen Schicht = 1 setzt. Diese Wellen sind, wie aus der früher gegebenen Zusammenstellung hervorgeht, ziemlich kurz, doch wäre es vielleicht nicht ausgeschlossen, daß sehr kurzperiodische Schwankungen durch sie hervorgerufen werden.

Die zweite mögliche Wellenlänge ist

$$L = \frac{\bar{L}}{\sqrt{1 + \varkappa \frac{U^2}{g} \frac{4s}{(s-1)^2}\left(1 - \frac{\varkappa}{4}\frac{U^2}{g}\right)}} = \frac{\bar{L}}{\sqrt{1 + \frac{\varkappa}{g} \frac{v^2 s}{(s-1)^2}\left(1 - \frac{\varkappa}{10}\frac{v^2}{g}\right)}}. \quad (4)$$

Hierin hat $\bar{L}$ die oben angedeutete Bedeutung (homogene Schichtung) und ist nach (2)

$$\bar{L} = \frac{\pi}{2} \frac{v^2}{g} \frac{s+1}{s-1}. \quad (5)$$

Nachstehende Zusammenstellung, die mittels der Formeln (4) und (5) berechnet ist, zeigt wieder die Verkleinerung der Wellen bei stabilerer Schichtung.

Tabelle III.

Länge Helmholtzscher Luftwogen für verschiedene Wind- und Temperatursprünge.

| $v$ m/sec | | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{T^{II}}{T^{I}} = \frac{273}{268}$ | $L$ | 70 m | 225 m | 620 m | 1105 m | 1730 m |
| | $L$ | 65 m | 177 m | 403 m | 600 m | 790 m |
| $\frac{T^{II}}{T^{I}} = \frac{280}{270}$ | $\bar{L}$ | 35 m | 140 m | 315 m | 560 m | 880 m |
| | $L$ | 34 m | 130 m | 272 m | 440 m | 630 m |

Eine ausführliche Zusammenstellung ist in Tabelle XIII (§ 18) gegeben. Man sieht aber schon aus vorstehender kurzer Übersicht, wie stark verkleinernd die Schichtung auf die Wellenlänge wirkt.

Es mag in diesem Zusammenhange daran erinnert werden, daß A. Wegener 1906 bei Anwendung von (5), also Nichtberücksichtigung der stabilisierenden Wirkung der Schichtung, wesentlich zu große Wellenlängen der Luftwogen ausrechnete. Um richtige Werte zu bekommen, nahm er deshalb 1912 eine Reduktion des beobachteten, nicht vollkommen sprunghaften Überganges auf die „ideale Inversion“ vor, wodurch sich wesentlich größere Temperatursprünge ergaben. Dadurch kam er natürlich auch zu kleineren Wellenlängen, da bei größeren Temperatursprüngen auch eine größere Energie zur Erzeugung gleich großer Wellenlänge nötig wäre. Es erscheint aber doch fraglich, ob auf diese Weise die kleineren Wellenlängen erklärt werden. Denn der ausgerechnete

„ideale“ Temperatursprung ist ja in Wirklichkeit nicht vorhanden und kann deshalb wohl auch nicht einen Mehrverbrauch an Energie erfordern. Auch durch die Verteilung des Temperatur-„Sprunges“ auf eine Schicht von einiger Mächtigkeit dürfte ein größerer Energieverbrauch nicht hervorgerufen werden[1]). Es wird vielmehr durch obige Ergebnisse nahegelegt, den Grund dafür, daß die Wellenlängen bei Wegener zu groß sind, darin zu suchen, daß von ihm die stabile Schichtung der Luft nicht mit berücksichtigt ist. In der Tat zeigt ja unsere Zusammenstellung und die Tabelle III eine beträchtliche Verkleinerung der Wellenlängen unter sonst gleichen Umständen bei stabiler Schichtung.

Wir wollen das noch an zwei Beispielen nach A. Wegener 1906 belegen. Am 6. Dezember 1905 war $v = 10{,}4$ m/sec, $T = 2{,}2^0$ (Abstiegswert), die Wellenlänge $L = 1600$ m bzw. 1920 m. Ohne Berücksichtigung der Schichtung ergibt sich als theoretische Wellenlänge $\bar{L} = 4300$ m, mit Berücksichtigung der Schichtung $L = 908$ m. Am 19. Februar 1906 betrug $v = 2{,}5$ m/sec, $\Delta T = 3{,}7^0$, die beobachtete Wellenlänge 175 m. Es ist unter der Voraussetzung homogener Schichtung $\bar{L} = 213$ m, bei Berücksichtigung der Schichtung $L = 166$ m.

Aus beiden Beispielen[2]) sieht man, daß bei Berücksichtigung der Schichtung die Wellenlänge kleiner wird als die beobachtete. Der Grund dafür ist leicht einzusehen. Dadurch, daß wir zwar eine Schichtung voraussetzen, aber von der Kompressibilität absehen, nehmen wir eine viel stabilere Lagerung der Luftmassen an, als es der Wirklichkeit entspricht. In der Tat werden wir in § 18 sehen, daß bei Berücksichtigung der Zustandsänderungen vertikal verschobener Luftmassen die berechneten Wellenlängen zwischen die eben ermittelten zu liegen kommen.

Schließlich sind natürlich im vorliegenden Fall auch dann noch Luftwogen möglich, wenn die Dichte selbst keine Unstetigkeit aufweist. Dann ergibt sich

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} a^2 = {} & \frac{\varkappa^2}{4}\,\frac{U_I^4 + U_{II}^4}{(U_I^2 + U_{II}^2)^2} - \frac{\varkappa^2}{4} + g\varkappa\,\frac{1}{U_I^2 + U_{II}^2} \\ & + \frac{2\,U_I^2\,U_{II}^2}{(U_I^2 + U_{II}^2)^2}\sqrt{\frac{\varkappa^2}{4} - \frac{U_I^2 + U_{II}^2}{U_I^2\,U_{II}^2}\,g\varkappa}, \end{aligned}\right.$$

---

1) Eine Untersuchung über den Energieverbrauch der Luftwogen bei derartigen Schichtungen soll später angestellt werden.

2) Weitere Beispiele gab Trey 1919 an. Aber es ist nicht ganz klar ersichtlich, wie er zu seinen registrierten Wellenlängen kam, und eine Prüfung daher nicht möglich.

wobei für $\varkappa^{I}$ und $\varkappa^{II}$ wieder ein gemeinsamer Wert $\varkappa$ gesetzt ist. Setzen wir zur Orientierung in einer der beiden Schichten wieder die Geschwindigkeit der Grundströmung = 0, so ergibt sich

$$L = 2\pi \frac{U}{\sqrt{g\varkappa}} = 2\pi \frac{U}{g} \sqrt{RT}, \tag{6a}$$

da $\varkappa = \frac{g}{RT}$ ist. Die gleiche Formel folgt natürlich auch aus (3a), wenn $s = 1$ gesetzt wird.

Nachstehende Tabelle gibt für verschiedene Mitteltemperaturen $T$ und für verschiedene Windgeschwindigkeiten $U$ in der einen Schicht die zugehörigen Wellenlängen in Metern.

Tabelle IV.
Länge stationärer Wellen bei Unstetigkeit der Dichteänderung.

| $T$ \ $U$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 m/sec |
|---|---|---|---|---|---|
| 255° | 173 m | 347 m | 520 m | 695 m | 867 m |
| 265° | 177 „ | 354 „ | 530 „ | 710 „ | 885 „ |
| 275° | 180 „ | 360 „ | 540 „ | 720 „ | 900 „ |

## § 8. Zwei Schichten mit unterer starrer Grenzfläche und freier Oberfläche.

In diesem Falle bleiben die Störungsgrößen für die untere Schicht die gleichen wie in (6, 1). Zur Bestimmung der Relation zwischen den beiden Konstanten der oberen Schicht ist jetzt natürlich die Oberflächenbedingung zu verwenden.

Es ist in genügender Nähe der ungestörten freien Oberfläche

$$P^{II} - P_2^{II} = -g\, Q_2^{II}(z - h^{II}),$$

worin der Index 2 andeuten soll, daß die betreffenden Werte an der Stelle $z = h^{II}$ zu nehmen sind. Als Gleichung der freien Oberfläche ergibt sich nach (2, 8a) und (4, 9)

$$\left.\begin{aligned} & -g\, Q_2^{II}(z - h_2^{II}) - Q_2^{II} \frac{\beta - \alpha U^{II}}{\alpha} \left[ \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} + N^{II} \right) K_1^{II} e^{N^{II} h^{II}} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} - N^{II} \right) K_2^{II} e^{-N^{II} h^{II}} \right] e^{-\frac{\varkappa^{II}}{2} h^{II}} e^{i(\alpha x - \beta t)} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Bei Benutzung der Grenzbedingung (2, 10a) ergibt sich folgende Relation zwischen den Konstanten $K_1^{II}$ und $K_2^{II}$:

$$\frac{2 K_1^{II} e^{N^{II} h^{II}}}{\left( \frac{\beta - \alpha U^{II}}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} - N^{II} \right) - g} = - \frac{2 K_2^{II} e^{-N^{II} h^{II}}}{\left( \frac{\beta - \alpha U^{II}}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} + N^{II} \right) -} = K^{II},$$

und damit folgende Werte für die Störungsgrößen in der oberen Schicht

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
\psi^{\mathrm{II}} &= K^{\mathrm{II}}\left\{\left[\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}-g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})-\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2 N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\right\}\times\\
&\qquad\times e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{\mathrm{II}} &= -K^{\mathrm{II}}\left\{\left[\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}2}}{4}-N^{\mathrm{II}2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2-\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})-g\,N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\right\}\times\\
&\qquad\times e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{\mathrm{II}} &= i\alpha K^{\mathrm{II}}\left\{\left[\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}-g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})-\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2 N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\right\}\times\\
&\qquad\times e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{\mathrm{II}} &= -Q^{\mathrm{II}}\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}K^{\mathrm{II}}\left\{\left[\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}2}}{4}-N^{\mathrm{II}2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2-\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})-\right.\\
&\qquad\left.-g\,N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\right\}e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
q^{\mathrm{II}} &= -\varkappa^{\mathrm{II}}Q^{\mathrm{II}}\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}K^{\mathrm{II}}\left\{\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2-g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})-\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2 N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{II}}(z-h^{\mathrm{II}})\right\}e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}.
\end{aligned}\right.
$$

Die Ausdrücke für die Störungsgrößen in der unteren Schicht waren

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
\psi^{\mathrm{I}} &= K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\,e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{\mathrm{I}} &= -K^{\mathrm{I}}\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})+N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\right]e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{\mathrm{I}} &= i\alpha K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\,e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{\mathrm{I}} &= -Q^{\mathrm{I}}\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}{\alpha}K^{\mathrm{I}}\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})+N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\right]e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
q^{\mathrm{I}} &= -\varkappa^{\mathrm{I}}Q^{\mathrm{I}}\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}(z+h^{\mathrm{I}})\,e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}.
\end{aligned}\right.
$$

Da ferner wie früher

$$P^{\mathrm{I}}-P^{\mathrm{II}}=-g(Q_0^{\mathrm{I}}-Q_0^{\mathrm{II}})z$$

in der Nähe der gemeinsamen Grenzfläche $z=0$, folgt als Gleichung dieser Grenzfläche nach (2, 8)

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&-g(Q_0^{\mathrm{I}}-Q_0^{\mathrm{II}})z-\left\{Q_0^{\mathrm{I}}\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}{\alpha}K^{\mathrm{I}}\left[\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}}+N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}}\right]+\right.\\
&+Q_0^{\mathrm{II}}\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}K^{\mathrm{II}}\left[\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}2}}{4}-N^{\mathrm{II}2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\right)^2-\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{II}}h^{\mathrm{II}}+\\
&\left.+g\,N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Cos}\,N^{\mathrm{II}}h^{\mathrm{II}}\right\}e^{i(\alpha x-\beta t)}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Wendet man auf diese Gleichung die Grenzflächenbedingungen (2, 9) an, so kann man aus den entstehenden Gleichungen die Konstanten $K^{\mathrm{I}}$ und $K^{\mathrm{II}}$ eliminieren. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{Q_0^{\mathrm{I}}}{Q_0^{\mathrm{II}}} = q_0, \quad v^* = \frac{\beta}{\alpha}, \quad v^* - U^{\mathrm{I}} = v^{\mathrm{I}}, \quad v^* - U^{\mathrm{II}} = v^{\mathrm{II}},$$

so ergibt sich als Frequenzgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2 v^{\mathrm{II}4} + q_0 v^{\mathrm{I}2} v^{\mathrm{II}2}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} + N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}}\right)\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}}h^{\mathrm{II}}\right) - \\ &\quad - g q_0 v^{\mathrm{I}2}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} + N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}}\right) - g q_0 v^{\mathrm{II}2}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}}h^{\mathrm{II}}\right) + \\ &\quad + g^2(q_0 - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ist zunächst die Deckschicht unendlich tief, alle anderen Größen beliebig, so sind die Stokes'schen Oberflächenwellen $v^{\mathrm{II}2} = \frac{g}{\alpha}$ wieder eine mögliche Form der Wellenbewegung. Ähnlich hatte Solberg 1928 (S. 45/46) gefunden, daß im Falle zweier homogener Schichten mit freier Oberfläche, bei denen die obere Schicht unendlich tief ist, einmal Wellen von der Art möglich sind, wie wenn die untere Schicht erstarrt wäre (das sind die Oberflächenwellen), zweitens Wellen wie sie an der Grenze zweier Flüssigkeitsschichten zwischen starren Wänden auftreten. Wir werden diesen Zerlegungsmöglichkeiten noch oft begegnen.

Die Frequenzengleichung ist also jetzt wesentlich komplizierter als für die Grenzflächenwellen eines Systems mit starrer oberer und unterer Grenze. Zur Vereinfachung wollen wir zunächst von dem Windsprung absehen und $U^{\mathrm{I}} = U^{\mathrm{II}} = 0$ setzen, also $v^{\mathrm{I}} = v^{\mathrm{II}} = v^* = \frac{\beta}{\alpha}$. Dann möge die untere Schicht konstante Dichte haben, $\varkappa^{\mathrm{I}} = 0$, $N^{\mathrm{I}} = \alpha$, und sehr tief sein, so daß $\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}} = 1$ ist. Die obere Schicht sei zunächst so flach, daß gesetzt werden kann $\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}}h^{\mathrm{II}} = \frac{1}{N^{\mathrm{II}}h^{\mathrm{II}}}$. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich die Frequenzgleichung in

$$v^{*4} - v^{*2}\,\frac{g q_0}{\alpha}\,\frac{\alpha + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}} + \frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}}{\alpha + q_0\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}}\right)} + \frac{g^2(q_0 - 1)}{\alpha\left[\alpha + q_0\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}}\right)\right]} = 0$$

Daß in (5) nur die gradzahligen Potenzen von $v^*$ auftreten, is[t] Folge der Annahme $U^{\mathrm{I}} = U^{\mathrm{II}} = 0$.

Man entnimmt aus (5), daß bei verschwindendem Dicht[e] ($q_0 = 1$) die Wellengeschwindigkeit sich wieder auf die Sto[kes] reduziert. In der Tat ist das ja auch bereits von Poisson [für] beliebige Dichteverteilung bewiesen worden.

Deswegen überrascht auch nicht das weitere Ergebnis aus (5), daß bei Dichtesprung gleichfalls Wellen mit der Stokes'schen Geschwindigkeit möglich sind. Diese Wellen

$$v^* = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

gehen natürlich von der freien Oberfläche aus. Uns interessieren hier die Grenzflächenwellen mehr. Deren Geschwindigkeit ergibt sich aus (5) zu

$$v^{*2} = \frac{g\left(Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}}\right)}{\alpha Q_0^{\mathrm{II}} + Q_0^{\mathrm{I}}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}}\right)}.$$

Da die Wellenlänge groß gegen $h^{\mathrm{II}}$ sein sollte, können wir den ersten Summanden des Nenners vernachlässigen und erhalten

$$v^* = \sqrt{g h^{\mathrm{II}}\left(1 - \frac{Q_0^{\mathrm{II}}}{Q_0^{\mathrm{I}}}\right)\frac{1}{1 + \frac{\varkappa^{\mathrm{II}} h^{\mathrm{II}}}{2}}}. \tag{6}$$

Im Falle homogener oberer Schicht geht das in die bekannte Formel über

$$\bar{v}^* = \sqrt{g h^{\mathrm{II}}\left(1 - \frac{Q_0^{\mathrm{II}}}{Q_0^{\mathrm{I}}}\right)}. \tag{6a}$$

Es liegt nahe, wie Seite 28, eine äquivalente Höhe der oberen Schicht einzuführen. Die folgende Tabelle V gibt unter Annahme eines Dichtesprunges von $2 \cdot 10^{-8}$ und einer Dichteabnahme mit $\varkappa^{\mathrm{II}} = 5 \cdot 10^{-5}$ — Werte, wie sie in der Ozeanographie angegeben werden — die Geschwindigkeit für verschiedene Höhen der oberen Schicht $h^{\mathrm{II}}$ im homogenen Fall $\bar{v}^*$ und im inhomogenen Fall $v^*$ und die äquivalente Höhe $\bar{h}^{\mathrm{II}}$.

Tabelle V.

Äquivalente Höhen und Wellengeschwindigkeiten an der Grenze homogener und inhomogener Flüssigkeitsschichten.

| $h^{\mathrm{II}}$ | 25 m | 50 m | 100 m | 200 m | 300 m | 400 m |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{v}^*$ | 0,70 m/sec | 0,99 m/sec | 1,40 m/sec | 1,98 m/sec | 2,42 m/sec | 2,80 m/sec |
| $\bar{h}^{\mathrm{II}}$ | 24,9 m | 49,4 m | 97,5 m | 190 m | 280 m | 363 m |
| $v^*$ | 0,69 m/sec | 0,98 m/sec | 1,38 m/sec | 1,93 m/sec | 2,35 m/sec | 2,67 m/sec |

Die Abweichungen im Falle einer Deckschicht mit veränderlicher Dichte sind also, was die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellenstörung anlangt, nur gering.

Wir wollen nun annehmen, daß neben der oberen auch die untere Schicht sehr flach ist. Dann lautet die Frequenzgleichung, da wir $\mathfrak{Ctg}\, N^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{I}} = \frac{1}{N^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{I}}}$ setzen können,

$$v^{*4} - g q_0 \frac{\frac{1}{h^{\mathrm{I}}} + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}} + \frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}}{a^2 + \frac{q_0}{h^{\mathrm{I}}}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}}\right)} v^{*2} + \frac{g^2 (q_0 - 1)}{a^2 + \frac{q_0}{h^{\mathrm{I}}}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}}\right)} = 0. \qquad (7)$$

Im Nenner des zweiten und dritten Gliedes der linken Seite dieser Gleichung können wir das erste Glied wegen der eben gemachten Voraussetzungen vernachlässigen. Außerdem wollen wir auch von dem Dichtesprung absehen, also $q_0 = 1$ setzen. Das gibt

$$v^{*2} = g \frac{h^{\mathrm{II}} + h^{\mathrm{I}} + \frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} h^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{II}}}{1 + \frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2} h^{\mathrm{II}}} \qquad (8)$$

Im Falle von Homogenität auch der oberen Schicht ergibt sich daraus die Lagrange'sche Formel

$$v^* = \sqrt{g\,(h^{\mathrm{I}} + h^{\mathrm{II}})}$$

für die Geschwindigkeit langer Wellen auf seichtem Wasser. Setzen wir $h^{\mathrm{I}} = 100$ m, $h^{\mathrm{II}} = 2$ m, $\varkappa = 0{,}059$ (vgl. Seite 28), so ergibt sich im Falle homogener Schichtung $v^* = 31{,}6$ m/sec, bei inhomogener 31,4 m/sec. Die Abweichungen sind also wieder ganz geringfügig.

Aus (5) ergibt sich bei Nichtberücksichtigung der Dichteabnahme in der oberen Schicht die bekannte Formel

$$v^{*2} = g \frac{h^{\mathrm{I}} h^{\mathrm{II}}}{h^{\mathrm{I}} + h^{\mathrm{II}}} \left(1 - \frac{Q_0^{\mathrm{II}}}{Q_0^{\mathrm{I}}}\right). \qquad (9)$$

Sie geht übrigens für $h^{\mathrm{I}} \rightarrow \infty$ in (6a) über. Aus (7) würde man bei Berücksichtigung eines Dichtesprunges ein Analogon für den Fall vertikal abnehmender Dichten finden, doch soll die Rechnung hier wegen ihres geringen Interesses nicht wiedergegeben werden.

Schließlich sei noch ergänzend bemerkt, daß sich für stationäre Wellen in zwei unendlich tiefen Schichten mit freier Oberfläche die gleichen Resultate ergeben, wie wenn auch die obere Grenzfläche starr ist.

## § 9. Drei Schichten zwischen starren Grenzen.

Die Lage der drei Schichten sei durch die umstehende Figur 1 erklärt. Die unterste Schichtgrenze $z = 0$ sei starr, ebenso die oberste $z = h^{\mathrm{III}}$. Größen, deren Wert an diesen Stellen zu nehmen sind,

seien durch die Indizes o bzw. 3 gekennzeichnet. Entsprechend sind die Größen an der Schichtgrenze $z = h^{\mathrm{I}}$ (im ungestörten Zustand) zwischen erster und zweiter Schicht durch 1, und zwischen zweiter und dritter durch 2 charakterisiert.

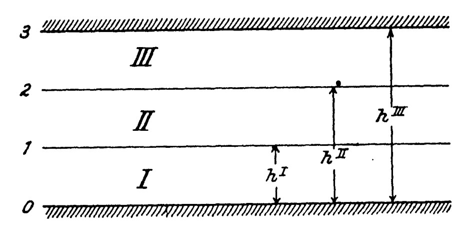



Fig. 1. System von drei Schichten mit starrer oberer Grenze.

Da an der untersten und obersten starren Grenze die Vertikalkomponenten der Störungsgeschwindigkeiten verschwinden müssen,

$$w_{z=0,\,h^{\mathrm{III}}} = 0,$$

folgt für die Integrationskonstanten der ersten und dritten Schicht

$$K_1^{\mathrm{I}} + K_2^{\mathrm{I}} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{K^{\mathrm{I}}}{2} = K_1^{\mathrm{I}} = -K_2^{\mathrm{I}}$$

und

$$K_1^{\mathrm{III}} e^{N^{\mathrm{III}} h^{\mathrm{III}}} + K_2^{\mathrm{III}} e^{-N^{\mathrm{III}} h^{\mathrm{III}}} = 0$$

oder

$$\frac{K^{\mathrm{III}}}{2} = K_1^{\mathrm{III}} e^{N^{\mathrm{III}} h^{\mathrm{III}}} = -K_2^{\mathrm{III}} e^{-N^{\mathrm{III}} h^{\mathrm{III}}}$$

Damit ergibt sich für die Störungsgrößen

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi^{\mathrm{I}} &= K^{\mathrm{I}} \,\mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}} z \; e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ u^{\mathrm{I}} &= -K^{\mathrm{I}} \left( \frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} \,\mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}} z + N^{\mathrm{I}} \,\mathfrak{Cof}\, N^{\mathrm{I}} z \right) e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ w^{\mathrm{I}} &= i\alpha K^{\mathrm{I}} \,\mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}} z \; e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p^{\mathrm{I}} &= -\frac{\beta - \alpha U^{\mathrm{I}}}{\alpha} Q^{\mathrm{I}} K^{\mathrm{I}} \left( \frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} \,\mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}} z + N^{\mathrm{I}} \,\mathfrak{Cof}\, N^{\mathrm{I}} z \right) e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ q^{\mathrm{I}} &= -\varkappa^{\mathrm{I}} \frac{\alpha}{\beta - \alpha U^{\mathrm{I}}} Q^{\mathrm{I}} K^{\mathrm{I}} \,\mathfrak{Sin}\, N^{\mathrm{I}} z \; e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2} z} e^{i(\alpha x - \beta t)} \end{aligned} \right.$$

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{II} &= \left(K_1^{II} e^{N^{II}z} + K_2^{II} e^{-N^{II}z}\right) e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{II} &= -\left[\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}+N^{II}\right) K_1^{II} e^{N^{II}z} + \left(\frac{\varkappa^{II}}{2}-N^{II}\right) K_2^{II} e^{-N^{II}z}\right] e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{II} &= i\alpha\left(K_1^{II} e^{N^{II}z} + K_2^{II} e^{-N^{II}z}\right) e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{II} &= -Q^{II}\frac{\beta-\alpha U^{II}}{\alpha}\left[\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}+N^{II}\right) K_1^{II} e^{N^{II}z} + \left(\frac{\varkappa^{II}}{2}-N^{II}\right) K_2^{II} e^{-N^{II}z}\right] e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
q^{II} &= -\varkappa^{II}\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{II}}\, Q^{II}\left(K_1^{II} e^{N^{II}z} + K_2^{II} e^{-N^{II}z}\right) e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
\psi^{III} &= K^{III}\,\mathfrak{Sin}\, N^{III}(z-h^{III})\; e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{III} &= -K^{III}\left[\frac{\varkappa^{III}}{2}\,\mathfrak{Sin}\, N^{III}(z-h^{III}) + N^{III}\,\mathfrak{Cof}\, N^{III}(z-h^{III})\right] e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{III} &= i\alpha K^{III}\,\mathfrak{Sin}\, N^{III}(z-h^{III})\; e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{III} &= -\frac{\beta-\alpha U^{III}}{\alpha}\, Q^{III} K^{III}\left[\frac{\varkappa^{III}}{2}\,\mathfrak{Sin}\, N^{III}(z-h^{III}) + N^{III}\,\mathfrak{Cof}\, N^{III}(z-h^{III})\right] \times\\
&\qquad \times\, e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
q^{III} &= -\varkappa^{III}\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{III}}\, Q^{III} K^{III}\,\mathfrak{Sin}\, N^{III}(z-h^{III})\; e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Störungsausdrücke für die erste und dritte Schicht sind gleich gebaut wie die in (6, 1). Die Relation zwischen $K_1^{II}$ und $K_2^{II}$, den Konstanten der Störungsgrößen in der 2. Schicht, ergeben sich aus den Grenzbedingungen an den beiden beweglichen Grenzflächen 2 und 3.

Es ist ebenso wie früher in einer genügend kleinen Umgebung von $z = h^{I}$

$$P^{I} - P^{II} = -g(Q_1^{I} - Q_1^{II})(z-h^{I}),$$

in einer genügend kleinen Umgebung von $z = h^{II}$

$$P^{II} - P^{III} = -g(Q_2^{II} - Q_2^{III})(z-h^{II}).$$

Daher ergibt sich aus (2, 8) als Gleichung der beweglichen Grenzfläche 1

$$z - h^{I} - Z_1\, e^{i(\alpha x-\beta t)} = 0, \qquad (2)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
Z_1 = &-\frac{(v^{*}-U^{I})\, Q_1^{I} K^{I}\left(\frac{\varkappa^{I}}{2}\,\mathfrak{Sin}\, N^{I}h^{I} + N^{I}\,\mathfrak{Cof}\, N^{I}h^{I}\right) e^{\frac{\varkappa^{I}}{2}h^{I}}}{g(Q_1^{I}-Q_1^{II})}\\
&+\frac{(v^{*}-U^{II})\, Q_1^{II}\left[\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}+N^{II}\right) K_1^{II} e^{N^{II}h^{II}} + \left(\frac{\varkappa^{II}}{2}-N^{II}\right) K_2^{II} e^{-N^{II}h^{II}}\right] e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}h^{I}}}{g(Q_1^{I}-Q_1^{II})}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
v^{*2} &= -\frac{1}{2a}\,\frac{q_1 a^{III} Q^{III} + a^{II} Q^{II}(q_1+q_2) - q_2 a^{I} Q^{I}}{Q^{II2} - Q^{I} Q^{II} a^{I} a^{II} - Q^{I} Q^{III} a^{I} a^{III} + Q^{II} Q^{III} a^{II} a^{III}} \\
&\pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}\left(\frac{q_1 a^{III} Q^{III} + a^{II} Q^{II}(q_1+q_2) - q_2 Q^{I} a^{I}}{Q^{II2} - Q^{I} Q^{II} a^{I} a^{II} - Q^{I} O^{III} a^{I} a^{III} + Q^{II} Q^{III} a^{II} a^{III}}\right)^2 - \frac{q_1 q_2}{a^2 (Q^{II2} - Q^{I} Q^{II} a^{I} a^{II} - Q^{I} Q^{III} a^{I} a^{III} + Q^{II} Q^{III} a^{II} a^{III})}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Um die Diskussion dieser komplizierten Formel zu ermöglichen, führen wir ein $s^I$ und $s^{III}$ durch,

$$Q^I = Q^{II}(1 + s^I); \qquad Q^{III} = Q^{II}(1 - s^{III}); \qquad Q^{II} = Q,$$

also

$$q_1 = g\,Q s^I; \qquad q_2 = g\,Q s^{III}.$$

$s^I$ und $s^{III}$ sind kleine Zahlen[1]), so daß wir die Glieder höherer Ordnung in $s^I$ und $s^{III}$ vernachlässigen können. Außerdem wollen wir der Einfachheit halber alle Schichten als gleich dick annehmen,

$$a^I = -a^{II} = -a^{III} = \mathfrak{Ctg}\,\alpha h = a.$$

Dann ergibt sich durch die Vernachlässigungen

$$(10)\quad v^{*2} = \frac{g}{\alpha}\left\{a\,\frac{s^I + s^{III}}{1 + 3a^2} + \frac{1}{1+3a^2}\sqrt{a^2 (s^I + s^{III})^2 - s^I s^{III}(1 + 3a^2)}\right\}.$$

Aus (10) erhält man natürlich für unendlich dicke Schichten ($a = 1$), von durch die Vereinfachungen hereingebrachten Modifikationen abgesehen, wieder (8). Bemerkenswert ist, daß für Schichten endlicher Dicke nicht ein ähnliches Resultat wie das durch (8) dargestellte zu ermitteln ist. Ähnliche Verhältnisse treten nach Solberg 1928 (S. 45/46) im Falle zweier homogener Flüssigkeitsschichten mit unterer starrer Grenzfläche und freier Oberfläche auf. Wir kommen darauf in § 13 zurück. Bei unendlicher Tiefe des Gesamtsystems nämlich ergibt sich dort eine Zerlegung der Frequenzengleichung, aus der ersichtlich ist, daß in diesem Falle Wellen möglich sind, wie sie an der Grenze zweier unendlich ausgedehnter Schichten auftreten, und daneben Oberflächenwellen der oberen Schicht allein. Im Falle endlicher Tiefe des Gesamtsystem ist jedoch eine solche Zerlegung, wie auch in unserem Falle, nicht mehr möglich. Der Grund für das unbeeinflußte Nebeneinanderbestehen beider Wellensysteme in unendlich tiefen Schichten ist darin zu erblicken, daß eben infolge der unendlichen Schichttiefe die Amplitude der einen Welle bis zur anderen Grenzfläche schon unendlich klein geworden

---

[1]) Hat man z. B. in der Atmosphäre einen Temperatursprung von 5° bei einer Mitteltemperatur von 270°, so wird $s^I = \frac{Q^I - Q^{II}}{Q^{II}} = \frac{T^{II} - T^I}{T^I} = \frac{5}{270} = 0{,}0185.$

ist und infolgedessen die an dieser Grenzfläche gebildeten Wellen nicht stört. Für Schichten endlicher Dicke gelten diese Überlegungen natürlich nicht mehr, wie auch alle unsere Formeln zeigen. Bei den in der Natur vorkommenden Fällen in Atmosphäre und Hydrosphäre wird es freilich häufig so sein, daß man die Schichten als unendlich tief und daher die Wellen der einzelnen Grenzflächen als praktisch voneinander unbeeinflußt ansehen kann.

Als weiteren Spezialfall wollen wir annehmen, daß die Dichte in den Schichten I und III konstant, in II dagegen veränderlich ist. Außerdem sollen die Dichtesprünge an den gemeinsamen Grenzflächen 1 und 2 verschwinden, und sich statt dessen die Dichte von der Schichtgrenze 1 durch die Schicht II nach der Schichtgrenze 2 stetig ändern. Dieser Fall hat natürlich ein besonderes praktisches Interesse insofern, als wir in der Atmosphäre und Hydrosphäre nie sprunghafte Änderungen, sondern immer mehr oder weniger mächtige Übergangsschichten beobachten. Diesen Fall hat auch Rayleigh 1883 bereits untersucht.

Aus (6) ergibt sich unter diesen Voraussetzungen, wenn außerdem noch die Grundströmung als für das Problem unwesentlich gleich Null angenommen wird,

$$\left(\alpha^2 - \frac{g\varkappa^{II}}{v^{*2}}\right)v^{*4} + v^{*4}\alpha a^{I}\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II}N^{II}\right) - v^{*4}\alpha^2 a^{I} a^{III} + v^{*4}\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II}N^{II}\right)\alpha a^{III} = 0 \quad (11)$$

wobei $\frac{\varkappa^{II\,2}}{4} - N^{II\,2} = \frac{g\varkappa^{II}}{v^{*2}} - \alpha^2$ gesetzt ist. Wäre in (11) auch $\varkappa^{II} = 0$, so ließe sich $v^*$ nicht bestimmen: In einer inkompressiblen homogenen Flüssigkeit zwischen starren Wänden sind keine Schwerewellen möglich; was man auch daraus entnimmt, daß $g$ immer mit dem Faktor $\varkappa^{II}$ auftritt (vgl. Seite 32). Schicht I und III mögen die gleiche Mächtigkeit $h$ haben

$$a^{I} = -a^{III} = \mathfrak{Ctg}\,\alpha h = a.$$

Die Dicke $l$ der Übergangsschicht sei sehr klein, so daß

$$a^{II} = -\mathfrak{Ctg}\,N^{II} l = -\frac{1}{N^{II} l}.$$

Dann wird

$$v^{*2} = \frac{g\varkappa^{II}}{\alpha^2(1+a^2) + 2\frac{\alpha}{l}a}. \quad (12)$$

Kann man die Schichten I und III als sehr dick annehmen gegenüber der Wellenlänge, was in vielen Fällen erlaubt sein wird, so wird aus (12)

$$v^{*2} = \frac{g}{\alpha}\,\frac{\varkappa^{II}}{2\left(\alpha + \frac{1}{l}\right)}. \quad (12a)$$

Für zwei unendliche Schichten mit Dichtesprung war nach (6, 12)

$$v^{*2} = \frac{g}{\alpha} \frac{Q^{I} - Q^{II}}{Q^{I} + Q^{II}}.$$

Wie aus der Tabelle VI und Figur 2 ersichtlich ist, besteht die Wirkung einer Übergangsschicht in einer Verkleinerung der Wellengeschwindigkeit. Die dritte Spalte dieser Tabellen enthält die Wellengeschwindigkeit für den Fall eines scharfen Dichtesprunges, die folgenden Spalten für verschiedene Dicken der Übergangsschicht. $\varkappa$ ist natürlich verschieden für die verschiedenen Schichtdicken. Es ist berechnet nach der Formel

$$\varkappa = \frac{1}{l} (\ln Q^{I} - \ln Q^{III}),$$

die ohne weiteres verständlich sein dürfte. $\varkappa$ wird also mit wachsender Dicke der Übergangsschicht bei gleichbleibenden Dichteunterschieden kleiner.

Die Abweichungen im Falle einer stetigen Dichteänderung gegen den Fall eines Dichtesprunges sind also nur klein. Daß für sehr kleine Übergangsschichten die Werte nicht genau mit denen für einen Sprung übereinstimmen, ist natürlich auf die kleinen durch die Vernachlässigungen begangenen Fehler zurückzuführen.

Wenn auch die Übergangsschicht tief ist gegen die Wellenlänge, so erhalten wir wieder die Formel

$$v^{*} = \sqrt{\frac{g L}{2 \pi}}.$$

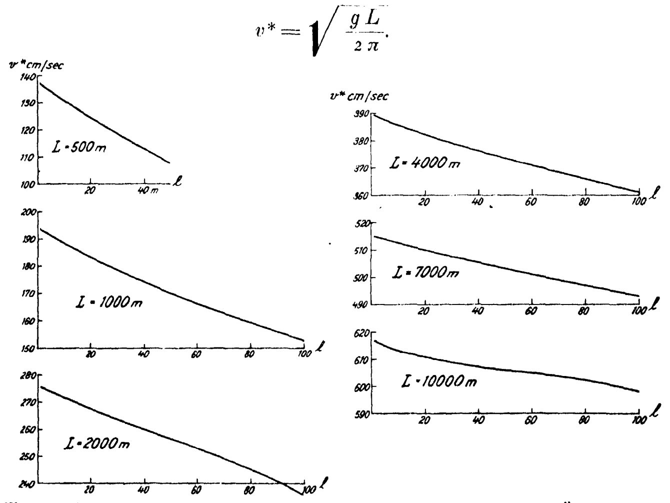



Fig. 2. Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Dicke der Übergangsschicht ($l$) bei verschiedenen Wellenlängen ($L$). Dichteänderung $5 \cdot 10^{-3}$.

# Tabelle VI.

## Wellengeschwindigkeit in unendlich tiefem Wasser bei Vorhandensein einer dünnen Schicht mit stetiger Dichteänderung.

### 1. Dichtesprung $1 \cdot 10^{-3}$.

| $L$ \ $l$ | $\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$ | 0 m | 1 cm | 1 m | 5 m | 10 m | 25 m | 50 m | 75 m | 100 m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 m | 12,5 m/sec | 0,28 m/sec | 0,26 m/sec | 0,26 m/sec | 0,23 m/sec | 0,21 m/sec | | | | |
| 500 „ | 28,0 „ | 0,62 „ | 0,60 „ | 0,59 „ | 0,58 „ | 0,56 „ | 0,52 m/sec | | | |
| 1000 „ | 39,6 „ | 0,87 „ | 0,85 „ | 0,84 „ | 0,83 „ | 0,82 „ | 0,77 „ | 0,73 m/sec | 0,69 m/sec | 0,69 m/sec |
| 2000 „ | 55,9 „ | 1,23 „ | 1,19 „ | 1,19 „ | 1,19 „ | 1,18 „ | 1,14 „ | 1,10 „ | 1,07 „ | 1,03 „ |
| 4000 „ | 79,2 „ | 1,75 „ | 1,69 „ | 1,69 „ | 1,69 „ | 1,68 „ | 1,64 „ | 1,61 „ | 1,58 „ | 1,55 „ |
| 7000 „ | 104,5 „ | 2,31 „ | 2,24 „ | 2,24 „ | 2,23 „ | 2,23 „ | 2,19 „ | 2,17 „ | 2,14 „ | 2,10 „ |
| 10000 „ | 125,0 „ | 2,76 „ | 2,68 „ | 2,68 „ | 2,68 „ | 2,67 „ | 2,64 „ | 2,61 „ | 2,59 „ | 2,57 „ |

### 2. Dichtesprung $5 \cdot 10^{-3}$.

| $L$ \ $l$ | $\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$ | 0 m | 1 cm | 1 m | 5 m | 10 m | 25 m | 50 m | 75 m | 100 m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 m | 12,5 m/sec | 0,62 m/sec | 0,62 m/sec | 0,60 m/sec | 0,54 m/sec | 0,48 m/sec | | | | |
| 500 „ | 28,0 „ | 1,38 „ | 1,38 „ | 1,37 „ | 1,34 „ | 1,30 „ | 1,22 m/sec | 1,08 m/sec | | |
| 1000 „ | 39,6 „ | 1,95 „ | 1,95 „ | 1,94 „ | 1,91 „ | 1,89 „ | 1,81 „ | 1,70 „ | 1,61 m/sec | 1,53 m/sec |
| 2000 „ | 55,9 „ | 2,76 „ | 2,76 „ | 2,75 „ | 2,73 „ | 2,71 „ | 2,66 „ | 2,56 „ | 2,48 „ | 2,36 „ |
| 4000 „ | 79,2 „ | 3,91 „ | 3,90 „ | 3,90 „ | 3,88 „ | 3,86 „ | 3,82 „ | 3,75 „ | 3,68 „ | 3,61 „ |
| 7000 „ | 104,5 „ | 5,17 „ | 5,15 „ | 5,15 „ | 5,14 „ | 5,13 „ | 5,10 „ | 5,04 „ | 4,99 „ | 4,93 „ |
| 10000 „ | 125,0 „ | 6,18 „ | 6,16 „ | 6,16 „ | 6,15 „ | 6,15 „ | 6,11 „ | 6,06 „ | 6,03 „ | 5,98 „ |

Sind allgemeiner die oberste und unterste Schicht unendlich tief, dagegen die mittlere Schicht beliebig, so läßt sich ähnlich wie bei Rayleigh ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Wellengeschwindigkeit angeben. Gleichung (11) verwandelt sich unter diesen Umständen, wenn die mittlere Schicht die Dicke $l$ (also $a^{II} = -\mathfrak{Ctg}\, N^{II} l$) hat, in

$$N^2 - \frac{\varkappa^2}{4} + 2\,a\,N\,\mathfrak{Ctg}\,N l + a^2 = 0,$$

wo

$$N^2 = \frac{\varkappa^2}{4} + a^2 - \frac{g\varkappa}{v^{*2}}$$

war, und wo die Indizes II als unnötig jetzt wegbleiben können. Daraus ergibt sich, wenn $2Nl = x$ gesetzt wird,

$$-\mathfrak{Tg}\,\frac{x}{2} = \frac{a x l}{-\frac{\varkappa^2 l^2}{4} + \frac{x^2}{4} + (a l)^2}$$

$$x^2 = 4 N^2 l^2 = l^2 \varkappa^2 + 4 a^2 l^2 - \frac{4 g \varkappa l^2}{v^{*2}}.$$

Nun ist $\varkappa l$ bei nicht zu großen Wellenlängen klein gegen $a l$. In der Atmosphäre z. B. ist $\varkappa$ von der Größenordnung $10^{-4}$. Ist also $L$ von der Größenordnung $10^4$, so wird $\frac{\varkappa^2 l^2}{4}$ nur ca. $^1/_2$% von $(al)^2$ betragen. Wir wollen daher in dieser Näherungsrechnung $\left(\frac{\varkappa l}{2}\right)^2$ vernachlässigen gegen $(al)^2$. Damit wird also

$$x^2 = 4 a^2 l^2 - \frac{4 g \varkappa l^2}{v^{*2}}$$

und

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{x}{4} = -\frac{2 a l}{x}, \quad \text{bzw.} \quad -\frac{x}{2 a l},$$

wie aus einer bekannten Formel folgt. Da der hyperbolische Tangens nie negativ werden kann, muß $x$ imaginär sein, $x = i\vartheta$,

$$\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{4} = \frac{2 a l}{\vartheta}, \quad \text{bzw.} \quad -\frac{\vartheta}{2 a l}$$

und

$$v^{*2} = \frac{4 g \varkappa l^2}{4 a^2 l^2 + \vartheta^2}.$$

Bei gegebener Wellenlänge und Schichtdicke kann die transzendente Gleichung für $\vartheta$ durch Versuche gelöst werden — sie gibt unendliche viele Werte $\vartheta$ —, und daraus können die zugehörigen Werte von $v^*$ berechnet werden. Derartige numerische Rechnungen sollen hier nicht durchgeführt werden. Ist $al$ zunächst sehr klein, d. h. die Wellenlänge groß im Vergleich zu $l$, so ist nach der ersten

Relation für $\vartheta$ auch $\frac{\vartheta}{4}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4}$ klein, also auch $\frac{\vartheta}{4}$ (z. B. nach Jahnke-Emde, Funktionentafeln), und durch Reihenentwicklung des Tangens erhält man $\vartheta^2 = 8\,a\,l$, also

$$v^{*2} = \frac{g}{a}\,\frac{\varkappa l}{2},$$

eine Formel, die aus (12a) in der Tat für sehr kleine $al$ hervorgeht. Wächst $al$, so wächst auch $\vartheta$, bis für sehr große $al$, d. h. sehr kleine Wellenlängen, $\vartheta = 2\pi$ wird. Wir werden sofort sehen, daß $al$ nicht wegen $l$ sehr groß werden darf. Das gibt

$$v^{*2} = \frac{4\,g\varkappa l^2}{4\,a^2 l^2 + 4\,\pi^2},$$

oder da das zweite Nennerglied gegen das erste klein ist,

$$v^{*2} = \frac{g\varkappa}{a^2}.$$

Diese Approximationsformel gilt nur für kleine Schichttiefen. Denn bei großen $l$ ist $\frac{\varkappa^2 l^2}{4}$ zwar immer noch klein gegen $(al)^2$, solange $L$ den oben angegebenen Betrag nicht überschreitet, aber diese beiden Größen sind nicht mehr klein gegen $\varkappa^2$. Daraus ist auch die Abweichung der eben gewonnenen Formel von der Seite 52 wieder erhaltenen Stokes'schen zu erklären. Dort handelt es sich um den Grenzübergang für $l \to \infty$, hier um den für $L \to \infty$. Da in der Atmosphäre $\varkappa = \frac{g}{RT}$ ist, wird

$$v^* = \frac{g}{a}\sqrt{\frac{1}{RT}}.$$

Diese Formel steht in engem Zusammenhang mit der später folgenden Formel (18), das ist die Formel für die Länge stationärer Wellen, die gegen die Schichtdicke sehr kurz sind. Sie läßt sich übrigens auch direkt aus der vorstehenden Formel ableiten, wie hier nicht näher ausgeführt werden braucht, da wir die Formel für die Wellenlänge der Wogenwolken allgemeiner ableiten wollen. Mit den hier erhaltenen Formeln kann auch die in § 7 erörterte Frage weiter behandelt werden, ob das Vorhandensein einer Schicht mit stetiger Dichteänderung erklären kann, warum die Helmholtzschen Luftwogen kleiner sind, als im Fall eines Dichtesprunges die Theorie angibt. Wir wollen wieder die Schichten I und III in sich homogen und unendlich tief annehmen; die Übergangsschicht II habe die geringe Mächtigkeit $l$. Dann folgt aus (6) zur Bestimmung der Wellenlänge

$$(13)\left\{\begin{aligned}&\left(a^2-\frac{g\varkappa^{II}}{U^{II\,2}}\right)U^{II\,4}+U^{I\,2}U^{II\,2}a\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}+\frac{1}{l}\right)+\\&\qquad+U^{I\,2}U^{III\,2}a^2-U^{II\,2}U^{III\,2}a\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}-\frac{1}{l}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

also

$$(14)\left\{\begin{aligned}&a=-\frac{U^{II\,2}}{2}\frac{\frac{\varkappa^{II}}{2}(U^{I\,2}-U^{III\,2})+\frac{1}{l}(U^{I\,2}+U^{III\,2})}{U^{II\,4}+U^{I\,2}U^{III\,2}}\pm\\&\pm\sqrt{\frac{U^{II\,4}}{4}\left[\frac{\frac{\varkappa^{II}}{2}(U^{I\,2}-U^{III\,2})+\frac{1}{l}(U^{I\,2}+U^{III\,2})}{U^{II\,4}+U^{I\,2}U^{III\,2}}\right]^2+\frac{g\varkappa^{II}U^{II\,2}}{U^{II\,4}+U^{I\,2}U^{III\,2}}}.\end{aligned}\right.$$

Sind die Absolutbeträge der Grundströmung in allen drei Schichten gleich $U$, so vereinfacht sich (14) in

$$(14a)\qquad L=\frac{4\pi}{g}\frac{U^2}{\varkappa^{II}l}.$$

Der Wert von (14), der sich bei der Wahl des negativen Wurzelvorzeichens ergibt, liefert eine negative Wellenlänge, kommt also nicht in Frage. Nun war

$$\varkappa l=\ln Q^{I}-\ln Q^{III}=\ln\frac{Q^{I}}{Q^{III}}$$

oder durch Reihenentwicklung, da $Q^{I}:Q^{III}$ nahezu gleich 1 ist,

$$(15)\qquad \varkappa l=2\,\frac{Q^{I}-Q^{III}}{Q^{I}+Q^{III}}.$$

Setzt man das in (14a) ein, so wird man auf die Formel (7,2) zurückgeführt

$$(7,2)\qquad L=\frac{2\pi}{g}U^2\frac{Q^{I}+Q^{III}}{Q^{I}-Q^{III}}.$$

Nimmt man an, daß $U^{I}=U^{II}=U$ ist, aber $U^{III}$ verschwindet, so ergibt sich aus (14)

$$a=\frac{g\varkappa^{II}}{\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}+\frac{1}{l}\right)}\frac{1}{U^2},$$

oder weil $\frac{\varkappa^{II}}{2}$ wesentlich kleiner als $\frac{1}{l}$ ist, mit genügender Genauigkeit

$$(16)\qquad L=\frac{2\pi}{g}\frac{U^2}{\varkappa^{II}l},$$

Mit (15) ergibt das die entsprechende Formel (7,3b); übrigens auch wenn man $U^{I}=0$, $U^{II}=U^{III}\neq 0$ setzt.

Aus den Resultaten der Formeln (14a) und (16) geht hervor, daß die Erklärung des Unterschiedes zwischen berechneter und beobachteter Wellenlänge bei den Helmholtzschen Wogenwolken

wohl nicht in dem von A. Wegener angegebenen Umstande (der Schichtdicke) liegen kann, denn die dadurch hervorgerufenen Modifikationen sind offenbar sehr gering. Natürlich handelt es sich in dem hier diskutierten Falle immer nur um isotherme Schichtung, aber es ist sicher erlaubt, daraus Schlüsse auf das Verhalten der Wellen bei anderen Gesetzen der Dichteabnahme mit der Höhe zu ziehen.

Ist auch die Übergangsschicht dick im Verhältnis zur Wellenlänge, was freilich bei den Helmholtzschen Luftwogen nie zutreffen dürfte, so ist im Falle $U^{III} = 0$ — der Einfachheit halber wollen wir nur diesen Spezialfall behandeln —

$$\left(a^2 - \frac{g\varkappa^{II}}{U^{II2}}\right) U^{II2} + a U^{I2} \left(\frac{\varkappa^{II}}{2} + N^{II}\right) = 0 \tag{17}$$

die aus (6) folgende Bestimmungsgleichung für $a$ bzw. $L$. (17) gibt zunächst

$$L = \frac{2\pi}{g} U^2,$$

das sind dieselben Wellenlängen wie an der Oberfläche einer unendlich tiefen Flüssigkeit. Ferner ergeben sich Wellen der Länge

$$L = 2\pi \frac{U}{\sqrt{g\varkappa^{II}}} = 2\pi \frac{U}{g} \sqrt{R T^{II}}. \tag{18}$$

Im Falle eines Systems von drei unendlich tiefen Schichten, deren mittlere einen stetigen Dichteübergang von der untersten zu der obersten Schicht vermittelt, treten also nach (7, 6a) Wellen der gleichen Länge auf wie in einem System von zwei unendlich tiefen Schichten, wenn hier die Dichte selbst eine stetige Funktion der Höhe ist. In beiden Fällen ist angenommen, daß die unterste oder oberste Schicht ruht.

Eine Tabelle der Länge dieser Wellen ist auf Seite 41 angegeben. Man könnte vielleicht daran denken, die Formel (18) auf die am 19. Februar 1906 beobachtete Welle (vgl. Seite 40) anzuwenden, da diese ziemlich kurz war. Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man aber $L = 237$ m, also einen viel zu großen Wert. Wir kommen in § 18 ausführlicher auf die Erklärung der Wogenwolken zurück.

## § 10. Drei Schichten mit freier Oberfläche.

Wir wollen nun ein dreifach geschichtetes System annehmen, das sich von dem vorhergehenden dadurch unterscheidet, daß die obere Grenze der obersten Schicht eine freie Oberfläche ist. Die Aus-

drücke für die Störungsgrößen der Schichten I und II bleiben dann dieselben wie in (9, 1), nämlich

$$
(1)\left\{\begin{aligned}
\psi^{\mathrm{I}} &= K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}z\;\; e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{\mathrm{I}} &= -K^{\mathrm{I}}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}z+N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cof}\,N^{\mathrm{I}}z\right)e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{\mathrm{I}} &= i\alpha K^{\mathrm{I}}\;\;\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}z\;\; e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{\mathrm{I}} &= -\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}{\alpha}\,Q^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{I}}\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}z+N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cof}\,N^{\mathrm{I}}z\right)e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
q^{\mathrm{I}} &= -\varkappa^{\mathrm{I}}\,\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}\,Q^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,N^{\mathrm{I}}z\;\; e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{I}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
\psi^{\mathrm{II}} &= \left(K_1^{\mathrm{II}}e^{N^{\mathrm{II}}z}+K_2^{\mathrm{II}}e^{-N^{\mathrm{II}}z}\right)e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{\mathrm{II}} &= -\left[\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}+N^{\mathrm{II}}\right)K_1^{\mathrm{II}}e^{N^{\mathrm{II}}z}+\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}-N^{\mathrm{II}}\right)K_2^{\mathrm{II}}e^{-N^{\mathrm{II}}z}\right]e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{\mathrm{II}} &= i\alpha\left(K_1^{\mathrm{II}}e^{N^{\mathrm{II}}z}+K_2^{\mathrm{II}}e^{-N^{\mathrm{II}}z}\right)e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{\mathrm{II}} &= -Q^{\mathrm{II}}\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\alpha}\left[\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}+N^{\mathrm{II}}\right)K_1^{\mathrm{II}}e^{N^{\mathrm{II}}z}+\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}-N^{\mathrm{II}}\right)K_2^{\mathrm{II}}e^{-N^{\mathrm{II}}z}\right]e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
q^{\mathrm{II}} &= -\varkappa^{\mathrm{II}}\,\frac{\alpha}{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}\,Q^{\mathrm{II}}\left(K_1^{\mathrm{II}}e^{N^{\mathrm{II}}z}+K_2^{\mathrm{II}}e^{-N^{\mathrm{II}}z}\right)e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{II}}}{2}z}\, e^{i(\alpha x-\beta t)}.
\end{aligned}\right.
$$

In einer genügend kleinen Umgebung von $h^{\mathrm{III}}$ gilt, wenn $P_3^{\mathrm{III}}$ den bevorzugten Druck an der Stelle $z=h^{\mathrm{III}}$, d. h. in der Lage der ungestörten freien Oberfläche angibt,

$$P^{\mathrm{III}} = P_3^{\mathrm{III}} - g\,Q_3^{\mathrm{III}}(z-h^{\mathrm{III}}).$$

Dann lautet die Gleichung der freien Oberfläche in der Form (2, 8a)

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
&P_3^{\mathrm{III}} - g\,Q_3^{\mathrm{III}}(z-h^{\mathrm{III}}) - Q_3^{\mathrm{III}}\,\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{III}}}{\alpha}\left[\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{III}}}{2}+N^{\mathrm{III}}\right)K_1^{\mathrm{III}}\,e^{N^{\mathrm{III}}h^{\mathrm{III}}}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{III}}}{2}-N^{\mathrm{III}}\right)K_2^{\mathrm{III}}\,e^{-N^{\mathrm{III}}h^{\mathrm{III}}}\right]e^{\frac{\varkappa^{\mathrm{III}}}{2}h^{\mathrm{III}}}\,e^{i(\alpha x-\beta t)} = \text{const.}
\end{aligned}\right.
$$

Die Grenzbedingung an der freien Oberfläche (2, 10a) liefert folgende Beziehung zwischen den beiden Konstanten $K_1^{\mathrm{III}}$ und $K_2^{\mathrm{III}}$ der Störungsgrößen der III. Schicht

$$K^{\mathrm{III}} = \frac{2\,K_1^{\mathrm{III}}\,e^{N^{\mathrm{III}}h^{\mathrm{III}}}}{\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{III}}}{2}-N^{\mathrm{III}}\right)\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{III}}}{\alpha}\right)^2-g} = -\frac{2\,K_2^{\mathrm{III}}\,e^{-N^{\mathrm{III}}h^{\mathrm{III}}}}{\left(\frac{\varkappa^{\mathrm{III}}}{2}+N^{\mathrm{III}}\right)\left(\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{III}}}{\alpha}\right)^2-g}.$$

Damit ergibt sich für die dritte Schicht entsprechend (8, 2)

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{III} &= K^{III}\left[\left(v^{III^2}\frac{\varkappa^{III}}{2}-g\right)\mathfrak{Sin}\,N^{III}(z-h^{III})-v^{III^2}N^{III}\,\mathfrak{Cos}\,N^{III}(z-h^{III})\right]\times\\
&\qquad\times e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{III} &= -K^{III}\left\{\left[\left(\frac{\varkappa^{III^2}}{4}-N^{III^2}\right)v^{III^2}-\frac{\varkappa^{III}}{2}g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{III}(z-h^{III})-\right.\\
&\qquad\left.-gN^{III}\,\mathfrak{Cos}\,N^{III}(z-h^{III})\right\}e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{III} &= i\alpha K^{III}\left\{\left(v^{III^2}\frac{\varkappa^{III}}{2}-g\right)\mathfrak{Sin}\,N^{III}(z-h^{III})-\right.\\
&\qquad\left.-v^{III^2}N^{III}\,\mathfrak{Cos}\,N^{III}(z-h^{III})\right\}e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{III} &= -Q^{III}v^{III}K^{III}\left\{\left[\left(\frac{\varkappa^{III^2}}{4}-N^{III^2}\right)v^{III^2}-\frac{\varkappa^{III}}{2}g\right]\mathfrak{Sin}\,N^{III}(z-h^{III})-\right.\\
&\qquad\left.-gN^{III}\,\mathfrak{Cos}\,N^{III}(z-h^{III})\right\}e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
q^{III} &= -\varkappa^{III}\frac{Q^{III}}{v^{III}}K^{III}\left\{\left(\frac{\varkappa^{III}}{2}v^{III^2}-g\right)\mathfrak{Sin}\,N^{III}(z-h^{III})-\right.\\
&\qquad\left.-v^{III^2}N^{III}\,\mathfrak{Cos}\,N^{III}(z-h^{III})\right\}e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}z}\,e^{i(\alpha x-\beta t)}.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Hierin bedeutet $v^{III}$ in Analogie zu früheren Abkürzungen $\frac{\beta-\alpha U^{III}}{\alpha}$. Die Gleichung der gemeinsamen Grenzfläche von I und II lautet

$$z-h^{I}-Z_1e^{i(\alpha x-\beta t)}=0 \qquad (4)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
Z_1 = &\frac{-v^{I}Q_1^{I}K^{I}\left(\frac{\varkappa^{I}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,N^{I}h^{I}+N^{I}\,\mathfrak{Cos}\,N^{I}h^{I}\right)e^{\frac{\varkappa^{I}}{2}h^{I}}}{g\left(Q_1^{I}-Q_1^{II}\right)}+\\
&+\frac{Q_1^{II}v^{II}\left[\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}+N^{II}\right)K_1^{II}e^{N^{II}h^{I}}+\left(\frac{\varkappa^{II}}{2}-N^{II}\right)K_2^{II}e^{-N^{II}h^{I}}\right]e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}h^{I}}}{g\left(Q_1^{I}-Q_1^{II}\right)},
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

und die Gleichung der Grenzflächen zwischen II. und III. Schicht

$$z-h^{II}-Z_2e^{i(\alpha x-\beta t)}=0 \qquad (6)$$

mit

$$
(7)\quad \begin{cases}
Z_2 = \dfrac{-Q_2^{II} v^{II}\left[\left(\dfrac{\varkappa^{II}}{2}+N^{II}\right)K_1^{II} e^{N^{II}h^{II}} + \left(\dfrac{\varkappa^{II}}{2}-N^{II}\right)K_2^{II} e^{-N^{II}h^{II}}\right] e^{\frac{\varkappa^{II}}{2}h^{II}}}{g\left(Q_2^{II}-Q_2^{III}\right)} + \\[2ex]
+\dfrac{\left\{\left[\left(\dfrac{\varkappa^{III2}}{4}-N^{III2}\right)v^{III2}-\dfrac{\varkappa^{III}}{2}g\right]\mathfrak{Sin}\, N^{III}(h^{II}-h^{III}) - g N^{III}\mathfrak{Cof}\, N^{III}(h^{II}-h^{III})\right\}}{g\left(Q_2^{II}-Q_2^{III}\right)} \times \\[2ex]
\times\, Q_2^{III} v^{III} K^{III} e^{\frac{\varkappa^{III}}{2}h^{II}}
\end{cases}
$$

Hierin geben wie immer die oberen, römischen Indizes an, zu welcher Schicht die betreffende Größe gehört, die unteren, arabischen, an welcher Schichtgrenze die speziellen Werte zu wählen sind.

Wenden wir auf diese Grenzflächengleichungen die Grenzbedingungen (2, 7) an, so ergeben sich folgende Relationen zwischen den zwei Amplituden $Z_1$ und $Z_2$ der inneren schwingenden Flächen und den vier Konstanten $K^I, K_1^{II}, K_2^{II}, K^{III}$

$$
(8)\quad \begin{cases}
K^I\, \mathfrak{Sin}\, N^I h^I = -v^I e^{-\frac{\varkappa^I}{2}h^I} Z_1 \\[2ex]
K^{III}\mathfrak{Sin}\, N^{III}(h^{II}-h^{III}) = -v^{III} e^{-\frac{\varkappa^{III}}{2}h^{II}} Z_2 \cdot \dfrac{1}{v^{III2}\left(\dfrac{\varkappa^{III}}{2}-a^{III}N^{III}\right)-g} \\[2ex]
K_1^{II} e^{N^{II}h^I} + K_2^{II} e^{-N^{II}h^I} = -v^{II} e^{-\frac{\varkappa^{II}}{2}h^I} Z_1 \\[2ex]
K_1^{II} e^{N^{II}h^{II}} + K_2^{II} e^{-N^{II}h^{II}} = -v^{II} e^{-\frac{\varkappa^{II}}{2}h^{II}} Z_2 .
\end{cases}
$$

Hier bedeutet $a^{III}$ wie früher $\mathfrak{Ctg}\, N^{III}(h^{II}-h^{III})$. Ebenso führen wir wieder mit derselben Bedeutung wie in § 9

$$
a^I = \mathfrak{Ctg}\, N^I h^I, \qquad a^{II} = \mathfrak{Ctg}\, N^{II}(h^{II}-h^{III})
$$

und

$$
q_1 = g(Q_1^I - Q_1^{II}), \qquad q_2 = g(Q_2^{II} - Q_2^{III})
$$

ein. Werden die Ausdrücke, die aus (8) für $K^I$, $K_1^{II}$, $K_2^{II}$, $K^{III}$ folgen, in (5) und (7) eingesetzt, so enthalten die beiden Gleichungen nur noch das Verhältnis der beiden Amplituden $\frac{Z_1}{Z_2}$. Eliminiert man dieses aus den beiden Gleichungen, so erhält man als Frequenzengleichung nach Potenzen der verschiedenen $v$ geordnet (abgesehen davon, daß auch in den $a$ und $N$ noch $v$ vorkommt)

$$
\left.
\begin{aligned}
&g q_1 q_2 - v^{I2} g q_2 Q_1^I \left(\frac{\varkappa^I}{2} + a^I N^I\right) - v^{II2} g \Big[q_1 Q_2^{II}\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II} N^{II}\right) - \\
&- q_2 Q_1^{II}\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II} N^{II}\right)\Big] + v^{III2} g q_1 \Big[\varkappa^{III} Q_2^{III} - Q_2^{II}\left(\frac{\varkappa^{III}}{2} - a^{III} N^{III}\right)\Big] + \\
&+ v^{II4} Q_1^{II} Q_2^{II} g \left(N^{II2} - \frac{\varkappa^{II2}}{4}\right) + v^{III4} q_1 Q_2^{III} \left(N^{III2} - \frac{\varkappa^{III2}}{4}\right) + \\
&+ v^{I2} v^{II2} g Q_1^I Q_2^{II} \left(\frac{\varkappa^I}{2} + a^I N^I\right)\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II} N^{II}\right) + \\
&+ v^{I2} v^{III2} Q_1^I \left(\frac{\varkappa^I}{2} + a^I N^I\right) g \Big[Q_2^{II}\left(\frac{\varkappa^{III}}{2} - a^{III} N^{III}\right) - \varkappa^{III} Q_2^{III}\Big] + \\
&+ v^{II2} v^{III2} \Big[q_1 Q_2^{II}\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II} N^{II}\right)\left(\frac{\varkappa^{III}}{2} - a^{III} N^{III}\right) - \\
&- g Q_1^{II} Q_2^{II}\left(\frac{\varkappa^{III}}{2} - a^{III} N^{III}\right)\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II} N^{II}\right) + g \varkappa^{III} Q_1^{II} Q_2^{III}\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II} N^{II}\right)\Big] - \\
&- v^{I2} v^{II2} v^{III2} Q_1^I Q_2^{II}\left(\frac{\varkappa^I}{2} + a^I N^I\right)\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II} N^{II}\right)\left(\frac{\varkappa^{III}}{2} - a^{III} N^{III}\right) - \\
&- v^{I2} v^{III4} Q_1^I Q_2^{III}\left(\frac{\varkappa^I}{2} + a^I N^I\right)\left(N^{III2} - \frac{\varkappa^{III2}}{4}\right) - \\
&- v^{II4} v^{III2} Q_1^{II} Q_2^{II}\left(\frac{\varkappa^{III}}{2} - a^{III} N^{III}\right)\left(N^{II2} - \frac{\varkappa^{II2}}{4}\right) + \\
&+ v^{II2} v^{III4} Q_1^{II} Q_2^{III}\left(\frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II} N^{II}\right)\left(N^{III2} - \frac{\varkappa^{III2}}{4}\right) = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (9)
$$

Wir wollen diese umständliche Gleichung für eine Reihe von einfacheren und interessanteren Spezialfällen diskutieren.

Ist zunächst jede einzelne Schicht in sich homogen, ferner die Grundströmung in allen drei Schichten gleich groß, so daß wir sie gleich Null setzen können, und schließlich die Dicke aller Schichten gleich $h$, also
$$a^I = -a^{II} = -a^{III} = \mathfrak{Ctg}\,\alpha h,$$

so lautet die Frequenzengleichung

$$
\left.
\begin{aligned}
&v^{*6}\alpha^3 \left[a^3 Q^I Q^{II} + a Q^I Q^{III} + a Q^{II2} + a Q^{II} Q^{III}\right] - \\
&- v^{*4}\alpha^2 g \left[Q^{II2} + (Q^I - Q^{II})\, Q^{III} + 3\, a^2 Q^I Q^{II}\right] + \\
&+ v^{*2}\alpha g^2 a \left[3\, Q^I Q^{II} - Q^{II} Q^{III} - Q^I Q^{III} - Q^{II2}\right] - \\
&- g^3 (Q^I - Q^{II})(Q^{II} - Q^{III}) = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

Sind speziell alle drei Schichten sehr tief im Verhältnis zur Wellenlänge, so vereinfacht sich (10) weiter und läßt sich in zerlegter Form schreiben

$$(\alpha v^{*2} - g)\left(\alpha v^{*2} - g\,\frac{Q^I - Q^{II}}{Q^I + Q^{II}}\right)\left(\alpha v^{*2} - g\,\frac{Q^{II} - Q^{III}}{Q^{II} + Q^{III}}\right) = 0. \quad (11)$$

Ein Vergleich mit (9, 8) zeigt, daß also im Fall dreier homogener, übereinander geschichteter verschieden dichter Flüssigkeiten mit freier Oberfläche neben den Wellen an den Grenzflächen noch Oberflächenwellen mit der Stokes'schen Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v^* = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

möglich sind. Die Zerlegung (11) ist auch hier nur für den Fall unendlich großer Tiefe aller Schichten möglich. Dagegen ist bei beliebiger Tiefe der beiden unteren Schichten die Stokes'sche Wellengeschwindigkeit möglich, wenn nur die obere Schicht im Verhältnis zur Wellenlänge genügend tief ist. Das erkennt man am leichtesten durch Einsetzen in die aus (9) folgende Gleichung

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & g\, q_1 q_2 + v^{*2} g\, a \left[ -q_2 Q^{I} a^{I} + a^{II} g Q^{II} (Q^{I} - Q^{III}) - q_1 Q^{II} \right] + \\ & \quad + v^{*4} a^2 \left[ g\, Q^{II2} + q_1 Q^{III} - g\, Q^{I} Q^{II} a^{I} a^{II} + g Q^{I} Q^{II} (a^{I} - a^{II}) \right] - \\ & \quad - v^{*6} a^8 \left[ -a^{I} a^{II} Q^{I} Q^{II} + a^{I} Q^{I} Q^{III} + Q^{II2} - Q^{II} Q^{III} a^{II} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Ein gleiches Resultat hatte ja, wie bereits erwähnt, Solberg 1928 für zwei Schichten festgestellt, und außerdem steht diese Zerlegungsmöglichkeit natürlich im engen Zusammenhang mit dem Ergebnis Poissons 1816 über den Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Formel.

Wir wollen noch den Fall betrachten, daß gar keine sprunghaften Änderungen der Dichte stattfinden, aber in der mittleren Schicht die Dichte mit der Höhe exponentiell abnimmt. Dann lautet die aus (9) folgende Gleichung zur Bestimmung von $v^*$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & v^{*2} \left[ a^2 a^{I} a^{III} \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II} N^{II} \right) - a^8 a^{I} + a\, a^{III} \left( a^2 - \frac{g \varkappa^{II}}{v^{*2}} \right) + a^2 \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II} N^{II} \right) \right] + \\ & + g \left[ N^{II2} - \frac{\varkappa^{II2}}{4} + a\, a^{I} \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II} N^{II} \right) - a^2 a^{I} a^{III} + a\, a^{III} \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II} N^{II} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Ist III unendlich tief, die Tiefe der zweiten Schicht gleich $l$, so ergibt sich aus (13)

$$(14) \quad (g - a v^{*2}) \left[ N^{II2} - \frac{\varkappa^{II2}}{4} + a\, a^{I} \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} - a^{II} N^{II} \right) + a^2 a^{I} - u \left( \frac{\varkappa^{II}}{2} + a^{II} N^{II} \right) \right] = 0.$$

Das zweite Produkt der linken Seite dieser Gleichung führt auf Gleichung (9,11) zurück, wenn in dieser ebenfalls $a^{III} = -1$ gesetzt wird. Es gilt deshalb alles dort Gesagte auch hier: Die Änderung der Wellengeschwindigkeit bei nicht sprunghaftem Dichteübergang von einer Schicht zur anderen ist bedeutungslos, sofern die Wellenlängen nicht sehr klein gegen die Schichtdicken werden. Neben

diesen Wellen im Innern der Flüssigkeit treten, wie aus der ersten Klammer von (14) hervorgeht, noch Oberflächenwellen vom Stokes'schen Typus auf, ebenso wie vorher im Falle dreier homogener Schichten.

# Abschnitt III.

## Wellenbewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, deren Grundströmung sich linear mit der Höhe ändert.

### § 11. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Wir wollen in diesem Abschnitt annehmen, daß die betrachtete inkompressible Flüssigkeit in jeder Schicht eine konstante Dichte habe, daß aber die Grundströmung eine lineare Funktion der Höhe ist.

$$U = U_0 + bz, \tag{1}$$

wobei $U_0$ den Betrag der Grundströmung in der Höhe $z = 0$ bezeichnet. Die Größe $b$ ist in der Atmosphäre in den unteren Schichten natürlich positiv wegen der Windzunahme mit der Höhe. Da wir uns hier auf die Verhältnisse in einer Vertikalebene beschränken, können wir den Einfluß der Winddrehung nicht mit untersuchen. Außerdem wäre es natürlich richtiger gewesen, das von Hesselberg und Sverdrup 1915 ermittelte Gesetz für die vertikale Windabnahme auch hier anzuwenden (vgl. Figur 3), doch wären die dazu notwendigen Rechnungen viel komplizierter geworden. Im übrigen wird man aber auch aus dem Folgenden schon einen Überblick über die Einwirkung der vertikalen Windänderung auf die Wellengeschwindigkeit bekommen.

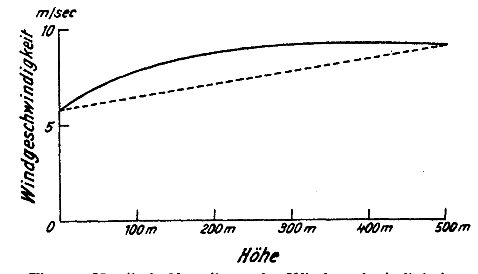



Fig. 3. Vertikale Verteilung der Windgeschwindigkeit (ausgezogen: nach Hesselberg-Sverdrup, gestrichelt: hier angenommen).

Auch in diesem Abschnitt soll die Erdrotation unberücksichtigt bleiben. Die Gleichungen (3, 1—3) verwandeln sich in

(2)
$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} + bw + \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{Dw}{Dt} \qquad + \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

(3)
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

(3,3) wird identisch erfüllt. Wegen der Form von (3), der Kontinuitätsgleichung, führen wir wieder die Stromfunktion $\psi$ ein durch

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Setzen wir wie in (4, 4)

(4)
$$\begin{cases} \psi = \Psi(z)\, e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p = D(z)\, e^{i(\alpha x - \beta t)}, \end{cases}$$

so ergibt sich als Differentialgleichung von $\Psi(z)$

(5)
$$\Psi'' - \alpha^2 \cdot \Psi = 0,$$

das ist dieselbe Gleichung, die man auch erhalten hätte, wenn keine Windänderung vorhanden ist.

Durch die gleiche Betrachtung wie Seite 21 ergibt sich aus (5) zunächst für die Rotationsgeschwindigkeit

$$2\eta = \frac{\partial(u+U)}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = b - \Delta\psi = b.$$

Die Rotation ist also konstant und abgesehen von den Flächenwirbeln an Grenzflächen, nur auf die Windänderung mit der Höhe zurückzuführen.

Ist $\Psi$ bestimmt, so wird die Amplitude des Störungsdruckes gefunden aus

(6)
$$D = -Q\left(b\,\Psi + \frac{\beta - \alpha U}{\alpha}\,\Psi'\right)$$

Aus (5) ergibt sich $\Psi$ in der Form

(7)
$$\Psi = K_1 e^{\alpha z} + K_2 e^{-\alpha z}.$$

Die Konstanten $K_1$ und $K_2$ bzw. ihr Verhältnis wird wie früher durch die speziellen Grenzbedingungen bestimmt.

Es sei noch bemerkt, daß die hier behandelten Probleme, Flüssigkeit mit exponentiell abnehmender Dichte und Flüssigkeit mit linearer Windabnahme die einzigen sind, die auf gewöhnliche

Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führen. Schon im Falle der Kombination der beiden Fälle, also gleichzeitig lineare Windabnahme und exponentiell abnehmende Dichte, haben die Differentialgleichungen Koeffizienten, die Funktionen der Höhe sind.

## § 12. Zwei Schichten zwischen starren Grenzen und eine Schicht mit freier Oberfläche.

Wir betrachten zunächst wieder ein System von zwei Schichten mit starren Wänden. Die ungestörte gemeinsame Grenzfläche habe die Gleichung $z = 0$, die Gleichung der starren Grenzfläche der unteren Schicht I heiße $z = -h^{\mathrm{I}}$, die der oberen Schicht II $z = h^{\mathrm{II}}$.

Wie in § 6 ergibt sich, da die Vertikalkomponenten der Störungsgeschwindigkeit an den starren Grenzen verschwinden müssen,

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{\mathrm{I}} &= K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(z+h^{\mathrm{I}})\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{\mathrm{I}} &= -\alpha K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha(z+h^{\mathrm{I}})\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{\mathrm{I}} &= i\alpha K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(z+h^{\mathrm{I}})\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{\mathrm{I}} &= -\varrho^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{I}}\left[b^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(z+h^{\mathrm{I}})+(\beta-\alpha U^{\mathrm{I}})\,\mathfrak{Cof}\,\alpha(z+h^{\mathrm{I}})\right]e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
\psi^{\mathrm{II}} &= K^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(z-h^{\mathrm{II}})\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
u^{\mathrm{II}} &= -\alpha K^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Cof}\,\alpha(z-h^{\mathrm{II}})\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
w^{\mathrm{II}} &= i\alpha K^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(z-h^{\mathrm{II}})\,e^{i(\alpha x-\beta t)}\\
p^{\mathrm{II}} &= -\varrho^{\mathrm{II}}K^{\mathrm{II}}\left[b^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(z-h^{\mathrm{II}})+(\beta-\alpha U^{\mathrm{II}})\,\mathfrak{Cof}\,\alpha(z-h^{\mathrm{II}})\right]e^{i(\alpha x-\beta t)}.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Da in der Nähe der Grenzfläche für den bevorzugten Druck gilt

$$P^{\mathrm{I}}-P^{\mathrm{II}} = -g(\varrho^{\mathrm{I}}-\varrho^{\mathrm{II}})\,z,$$

lautet die Gleichung der Grenzfläche nach (2, 8)

$$z + Z\,e^{i(\alpha x-\beta t)} = 0 \quad (2)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
Z = {} & \frac{\varrho^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{I}}\left[b^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h^{\mathrm{I}}+(\beta-\alpha U_0^{\mathrm{I}})\,\mathfrak{Cof}\,\alpha h^{\mathrm{I}}\right]}{g(\varrho^{\mathrm{I}}-\varrho^{\mathrm{II}})} - \\
& -\frac{\varrho^{\mathrm{II}}K^{\mathrm{II}}\left[-b^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h^{\mathrm{II}}+(\beta-\alpha U_0^{\mathrm{II}})\,\mathfrak{Cof}\,\alpha h^{\mathrm{II}}\right]}{g(\varrho^{\mathrm{I}}-\varrho^{\mathrm{II}})}
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

als Amplitude der schwingenden Fläche.

Mit der Grenzbedingung

$$(2,7)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0^{\mathrm{I,II}}\frac{\partial}{\partial x}\right)f_{z=0}+w_{z=0}^{\mathrm{I,II}}\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h^{\mathrm{I}}=\dfrac{\beta-\alpha U_0^{\mathrm{I}}}{\alpha}Z \\[2ex] K^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha h^{\mathrm{II}}=-\dfrac{\beta-\alpha U_0^{\mathrm{II}}}{\alpha}Z. \end{cases}$$

Setzt man aus (4) $K^{\mathrm{I}}$ und $K^{\mathrm{II}}$ in (3) ein, so erhält man als Frequenzengleichung

$$(5)\qquad \begin{cases} \beta^2(Q^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha h^{\mathrm{I}}+Q^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha h^{\mathrm{II}})+\beta[-2\alpha(U_0^{\mathrm{I}}Q^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha h^{\mathrm{I}}+U_0^{\mathrm{II}}Q^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha h^{\mathrm{II}})+ \\ \qquad +(b^{\mathrm{I}}Q^{\mathrm{I}}-b^{\mathrm{II}}Q^{\mathrm{II}})]+\alpha^2(U_0^{\mathrm{I}2}Q^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha h^{\mathrm{I}}+U_0^{\mathrm{II}2}Q^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha h^{\mathrm{II}})- \\ \qquad -\alpha(b^{\mathrm{I}}Q^{\mathrm{I}}U_0^{\mathrm{I}}-b^{\mathrm{II}}Q^{\mathrm{II}}U_0^{\mathrm{II}})-g(Q^{\mathrm{I}}-Q^{\mathrm{II}})=0. \end{cases}$$

Indem wir in dieser Gleichung $Q^{\mathrm{II}}=0$ setzen, erhalten wir den Fall einer Schicht mit freier Oberfläche. Die Frequenzengleichung liefert dann für $\beta$ die Formel (Indizes können fortbleiben)

$$(6)\qquad \beta=\alpha U_0-\frac{b}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\alpha h\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}\,\mathfrak{Tg}^2\alpha h+\alpha g\,\mathfrak{Tg}\,\alpha h}.$$

Diese Formel gilt zunächst für beliebige Schichttiefen. Im Falle einer sehr tiefen Schicht (diese Bedingung ist, wie wir schon früher Seite 1 sahen, bis auf ca. 1 % Fehler erfüllt, wenn $h\geq 0{,}4\,L$) reduziert sich (6) auf

$$(7)\qquad \beta=\alpha U_0-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\alpha g},$$

oder wenn wir die Wellengeschwindigkeit berechnen wollen

$$(7a)\qquad v^*=U_0-\frac{bL}{4\pi}\pm\sqrt{\left(\frac{bL}{4\pi}\right)^2+\frac{gL}{2\pi}}.$$

Der Wert von $b$ ist sehr klein,

$$\frac{U(z)-U_0}{z}=b.$$

Nach Hesselberg und Sverdrup 1915 herrscht in 0 Meter Höhe über dem Anemometer durchschnittlich ein Wind von der Stärke 6,6 m/sec, in 378 m Höhe 12,5 m/sec. Daraus berechnet sich $b=0{,}0167\ \mathrm{sec}^{-1}$. Nach Hellmann 1915 herrscht am Erdboden ein Wind von der Stärke 1,35 m/sec, in 25 m Höhe über dem Boden

5,33 m/sec[1]). Daraus ergibt sich $b = 0{,}159\ \text{sec}^{-1}$. Doch ist dieser extrem hohe Wert natürlich nur in Bodennähe gültig. Tabelle VII ist mit ihm berechnet worden.

Tabelle VII.

Wellengeschwindigkeit bei Änderung des Windes mit der Höhe für $\frac{dU}{dz} = 0{,}159\ \text{sec}^{-1}$.

| $L$ | $\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$ | $\sqrt{\frac{gL}{2\pi} + \left(\frac{bL}{4\pi}\right)^2}$ | $\frac{bL}{4\pi}$ |
|---|---|---|---|
| 5 m | 2,80 m/sec | 2,80 m/sec | 0,063 m/sec |
| 10 „ | 3,96 „ | 3,96 „ | 0,126 „ |
| 25 „ | 6,26 „ | 6,26 „ | 0,316 „ |
| 50 „ | 8,85 „ | 8,88 „ | 0,632 „ |
| 75 „ | 10,82 „ | 10,87 „ | 0,948 „ |
| 100 „ | 12,52 „ | 12,58 „ | 1,264 „ |
| 150 „ | 15,32 „ | 15,45 „ | 1,896 „ |
| 200 „ | 17,70 „ | 17,88 „ | 2,528 „ |

Sie gilt für eine unendlich tiefe Schicht mit freier Oberfläche, d. h. in praxi, wenn $h \geqq 0{,}4\ L$. Spalte 2 enthält die Wellengeschwindigkeit bei Nichtberücksichtigung der Windänderung mit der Höhe, Spalte 3, wenn die Windänderung mit berücksichtigt wird. Sie unterscheidet sich also selbst bei dem außerordentlich hoch angenommenen Wert von $b$ sehr wenig von der Geschwindigkeit bei Vernachlässigung der Windänderung. Etwas beträchtlicher ist die Änderung der „konvektiven"[2]) Geschwindigkeit, wie Spalte 4 erkennen läßt. Das Wellensystem wird mit einer Art „mittleren konvektiven" Geschwindigkeit $U_0 - \frac{bL}{4\pi}$ der ganzen Schicht fortbewegt. Bei Wellenbewegungen an der Oberfläche einer Schicht hat die vertikale Windänderung also nur auf den konvektiven, nicht auf den dynamischen Anteil der Geschwindigkeit einen merklichen Einfluß.

Im Falle einer sehr flachen Schicht (d. h. bis auf 1% Fehler, wenn $h \leqq 0{,}05\ L$) ergibt sich aus (6)

$$v^* = U_0 - \frac{bh}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bh}{2}\right)^2 + gh} = U_m \pm \sqrt{gh\left(1 + \frac{b^2 h}{4g}\right)}. \qquad (8)$$

[1]) Auch hier stellt die Annahme linearer Windzunahme mit der Höhe wie bei den Werten von Hesselberg und Sverdrup natürlich nur eine grobe Annäherung dar. In Wirklichkeit ist die Kurve komplizierter, wie aus Hellmanns Arbeit zu entnehmen ist.

[2]) Vgl. V. Bjerknes 1923.

In (8) ist die konvektive Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit der Schicht, da $\frac{1}{2}(U_0 + U_0 - bh) = U_0 - \frac{bh}{2}$ ist. Daß hier genau die mittlere Geschwindigkeit gleichzeitig die Rolle der konvektiven übernimmt, erklärt sich daraus, daß die ganze flache Schicht von der Wellenbewegung erfaßt wird. Das dynamische Glied wird wieder nur um einen zu vernachlässigenden Faktor modifiziert.

Wir gehen zu dem Fall zweier Schichten zwischen starren Grenzflächen über. (5) läßt sich ohne weiteres nach $\beta$ auflösen.

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
\beta = {} & a\frac{Q^{I} U_0^{I}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{I} + Q^{II} U_0^{II}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{II}}{Q^{I}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{I} + Q^{II}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{II}} - \frac{1}{2}\,\frac{b^{I} Q^{I} - b^{II} Q^{II}}{Q^{I}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{I} + Q^{II}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{II}} + \\
& \pm \frac{1}{Q^{I}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{I} + Q^{II}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{II}} \times \\
& \times \sqrt{\begin{aligned} & -a^2 Q^{I} Q^{II}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{I}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{II} (U_0^{I} - U_0^{II})^2 + a Q^{I} Q^{II} (U_0^{I} - U_0^{II})(b^{I}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{II} + \\ & + b^{II}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{I}) + \left(\frac{b^{I} Q^{I} - b^{II} Q^{II}}{2}\right)^2 + ag\,(Q^{I} - Q^{II})\,(Q^{I}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{I} + Q^{II}\,\mathfrak{Ctg}\,ah^{II}). \end{aligned}}
\end{aligned}\right.
$$

Nehmen wir zunächst an, daß die Wellenlänge klein im Verhältnis zur Schichttiefe sei, so ergibt sich aus (9)

$$
(10)\left\{\begin{aligned}
\beta = {} & a\frac{U_0^{I} Q^{I} + U_0^{II} Q^{II}}{Q^{I} + Q^{II}} - \frac{1}{2}\,\frac{b^{I} Q^{I} - b^{II} Q^{II}}{Q^{I} + Q^{II}} + \\
& \pm \frac{1}{Q^{I} + Q^{II}} \sqrt{\begin{aligned} & -a^2 Q^{I} Q^{II} (U_0^{I} - U_0^{II})^2 + a Q^{I} Q^{II} (b^{I} + b^{II})(U_0^{I} - U_0^{II}) + \\ & + \frac{1}{4}(b^{I} Q^{I} - b^{II} Q^{II})^2 + ag\,(Q^{I2} - Q^{II2}). \end{aligned}}
\end{aligned}\right.
$$

Die Abweichungen vom Falle konstanten Grundstroms sind also nicht groß, da ja $b^{I}$ und $b^{II}$ kleine Größen sind.

Sind beide Schichten sehr tief im Verhältnis zur Wellenlänge, ist an der Schichtgrenze kein Windsprung vorhanden $U_0^{I} = U_0^{II} = U_0$ und findet eine Änderung der Strömungsgeschwindigkeit nur in der oberen Schicht statt, so wird aus (10)

$$
(10a)\quad \beta = aU_0 - \frac{1}{2}\,b\,\frac{Q_0^{I} - Q_0^{II}}{Q^{I} + Q^{II}} \pm \frac{1}{Q^{I} + Q^{II}} \sqrt{\frac{1}{4}\,b^2 Q^{II2} + ag\,(Q^{I2} - Q^{II2})}\,.
$$

Hat man es mit im Verhältnis zur Wellenlänge sehr seichten Schichten zu tun, so wird aus (9)

$$\left.\begin{aligned}\beta = {} & \alpha \frac{\frac{1}{h^{\mathrm{I}}} Q^{\mathrm{I}} U_0^{\mathrm{I}} + \frac{1}{h^{\mathrm{II}}} Q^{\mathrm{II}} U_0^{\mathrm{II}}}{\frac{Q^{\mathrm{I}}}{h^{\mathrm{I}}} + \frac{Q^{\mathrm{II}}}{h^{\mathrm{II}}}} - \frac{1}{2}\, \alpha \frac{b^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{I}} - b^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{II}}}{\frac{Q^{\mathrm{I}}}{h^{\mathrm{I}}} + \frac{Q^{\mathrm{II}}}{h^{\mathrm{II}}}} + \alpha \frac{1}{\frac{Q^{\mathrm{I}}}{h^{\mathrm{I}}} + \frac{Q^{\mathrm{II}}}{h^{\mathrm{II}}}} \times \\ & \times \sqrt{-\frac{Q^{\mathrm{I}}}{h^{\mathrm{I}}} \frac{Q^{\mathrm{II}}}{h^{\mathrm{II}}} (U_0^{\mathrm{I}} - U_0^{\mathrm{II}})^2 + Q^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{II}} \left(\frac{b^{\mathrm{I}}}{h^{\mathrm{II}}} + \frac{b^{\mathrm{II}}}{h^{\mathrm{I}}}\right)(U_0^{\mathrm{I}} - U_0^{\mathrm{II}}) + \left(\frac{b^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{I}} - b^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{II}}}{2}\right)^2 + g(Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}})\left(\frac{Q^{\mathrm{I}}}{h^{\mathrm{I}}} + \frac{Q^{\mathrm{II}}}{h^{\mathrm{II}}}\right)}.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Auf eine nähere Diskussion der Formeln (10) und (11) wollen wir hier nicht eingehen.

Dagegen soll noch der Einfluß der vertikalen Windänderung auf die Luftwogen untersucht werden. Setzen wir in (5) $\beta = 0$, ferner die Schichtdicke sehr groß im Verhältnis zur Wellenlänge, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{U_0^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{I}} b^{\mathrm{I}} - U_0^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{II}} b^{\mathrm{II}}}{U_0^{\mathrm{I}2} Q^{\mathrm{I}} + U_0^{\mathrm{II}2} Q^{\mathrm{II}}} + g \frac{Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}}}{U_0^{\mathrm{I}2} Q^{\mathrm{I}} + U_0^{\mathrm{II}2} Q^{\mathrm{II}}}, \quad (12)$$

welche Formel zeigt, daß die Abweichungen vom Helmholtzschen Fall, die durch Zunahme der Windströmung hereingebracht werden, nur gering sind. Um beide Fälle bequem numerisch vergleichen zu können, setzen wir

$$|U^{\mathrm{I}}| = |U^{\mathrm{II}}| = U; \qquad b^{\mathrm{I}} = b^{\mathrm{II}} = b.$$

Dann wird

$$L = \bar{L} \frac{1}{1 + \frac{bU}{g}} \quad \text{mit} \quad \bar{L} = \frac{2\pi}{g} U^2 \frac{Q^{\mathrm{I}} + Q^{\mathrm{II}}}{Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}}}. \quad (12a)$$

Ist $T^{\mathrm{I}} = 268^0$, $T^{\mathrm{II}} = 273^0$, also $\frac{Q^{\mathrm{I}} + Q^{\mathrm{II}}}{Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}}} = 108{,}2$, so wird für verschiedene Werte von $2U$, das ist der Geschwindigkeitssprung, und $b = 3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{sec}^{-1}$, das ist ein an sich schon viel zu hoher Wert, die Wellenlänge wie in Tabelle VIII angegeben.

Tabelle VIII.

Länge stationärer Wellen in Schichten mit konstanter und veränderlicher Grundströmung.

| $2U$ | 2 m/sec | 4 m/sec | 6 m/sec | 8 m/sec | 10 m/sec |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{L}$ | 69,3 m | 278 m | 624 m | 1105 m | 1730 m |
| $L$ | 69 „ | 276 „ | 617 „ | 1090 „ | 1700 „ |

Infolge der Windzunahme mit der Höhe wird also die Wellenlänge etwas kleiner, aber die Änderung ist ganz gering und praktisch bedeutungslos. Sie erreicht in der Tabelle nur $1\frac{1}{2}\,\%$.

## § 13. Drei Schichten zwischen starren Grenzen und zwei Schichten mit freier Oberfläche.

Auch diese beiden Fälle wollen wir der Kürze halber wieder gemeinsam behandeln. Die untere feste Grenze der untersten Schicht liege wie in § 9 in der Höhe $z = 0$, die Dicke dieser Schicht sei $h^{I}$, also liegt die Schichtgrenze zwischen der ersten und zweiten Schicht in $z = h^{I}$, die Dicke der zweiten Schicht betrage $h^{II} - h^{I}$, also ist ihre obere Grenze im ungestörten Zustand $z = h^{II}$, schließlich die Dicke der dritten Schicht $h^{III} - h^{II}$, also ist ihre obere feste Grenze $z = h^{III}$. Die Schichtgrenzen selbst seien wie in § 9 durch die arabischen Ziffern 0, 1, 2, 3 gekennzeichnet, wo also 0 und 3 die untere und obere starre Grenzfläche bezeichnen.

Um aus dem Fall dreier Schichten mit starrer oberer Grenze den zweier Schichten mit freier Oberfläche zu erhalten, brauchen wir wie in § 12 nur $Q^{III} = 0$ zu setzen.

Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß nur in der mittleren, der Übergangsschicht II, die Strömung ihre Geschwindigkeit mit der Höhe ändert, also $U^{II} = U_1^{II} + b(z - h^{I})$, da dieser Fall natürlich von besonderem Interesse ist für die Untersuchung der Wellen an Grenzschichten statt Grenzflächen.

Wir beachten, daß in Schicht I die Vertikalkomponente der Störungsgeschwindigkeit für $z = 0$, in III für $z = h^{III}$ verschwinden muß. Das gibt wie in (12, 1)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\psi^{I} &= K^{I} \operatorname{Sin} \alpha z \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
u^{I} &= -\alpha K^{I} \operatorname{Cos} \alpha z \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
w^{I} &= i \alpha K^{I} \operatorname{Sin} \alpha z \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
p^{I} &= -Q^{I} K^{I} (\beta - \alpha U^{I}) \operatorname{Cos} \alpha z \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
\psi^{II} &= \left(K_1^{II} e^{\alpha z} + K_2^{II} e^{-\alpha z}\right) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
u^{II} &= -\alpha \left(K_1^{II} e^{\alpha z} - K_2^{II} e^{-\alpha z}\right) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
w^{II} &= i \alpha \left(K_1^{II} e^{\alpha z} + K_2^{II} e^{-\alpha z}\right) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
p^{II} &= -Q^{II} \left[(b + \beta - \alpha U^{II}) K_1^{II} e^{\alpha z} + (b - \beta + \alpha U^{II}) K_2^{II} e^{-\alpha z}\right] \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
\psi^{III} &= K^{III} \operatorname{Sin} \alpha (z - h^{III}) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
u^{III} &= -\alpha K^{III} \operatorname{Cos} \alpha (z - h^{III}) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
w^{III} &= i \alpha K^{III} \operatorname{Sin} \alpha (z - h^{III}) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)} \\
p^{III} &= -Q^{III} K^{III} (\beta - \alpha U^{III}) \operatorname{Cos} \alpha (z - h^{III}) \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)}.
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichung der Grenzfläche 1 lautet

$$P^{\mathrm{I}} - P^{\mathrm{II}} + p_1^{\mathrm{I}} - p_1^{\mathrm{II}} = 0$$

oder

$$z - h^{\mathrm{I}} + Z_1 e^{i(\alpha x - \beta t)} = 0 \tag{2}$$

mit

$$Z_1 = \frac{Q^{\mathrm{I}} K^{\mathrm{I}} \alpha v^{\mathrm{I}} \mathfrak{Cof}\, \alpha h^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}} \left[ (b + \alpha v_1^{\mathrm{II}}) K_1^{\mathrm{II}} e^{\alpha h^{\mathrm{I}}} + (b - \alpha v_1^{\mathrm{II}}) K_2^{\mathrm{II}} e^{-\alpha h^{\mathrm{I}}} \right]}{g(Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}})}, \tag{3}$$

wo $v^{\mathrm{I}}$, $v^{\mathrm{II}}$ wieder ihre frühere Bedeutung (Seite 43) haben, und die bei $v^{\mathrm{II}}$ unten angefügten Indizes bedeuten, an welcher Stelle der Schicht die Werte von $v^{\mathrm{II}}$, also von $U^{\mathrm{II}}$ zu nehmen sind. Bei $v^{\mathrm{I}}$ kann eine derartige Bezeichnung natürlich wegen der Konstanz von $U^{\mathrm{I}}$ unterbleiben.

Für die zweite Grenzfläche gilt analog

$$z - h^{\mathrm{II}} + Z_2 e^{i(\alpha x - \beta t)} = 0 \tag{4}$$

mit

$$\left. \begin{aligned} Z_2 = & \frac{Q^{\mathrm{II}} \left[ (b + \alpha v_2^{\mathrm{II}}) K_2^{\mathrm{II}} e^{\alpha h^{\mathrm{II}}} + (b - \alpha v_2^{\mathrm{II}}) K_2^{\mathrm{II}} e^{\alpha h^{\mathrm{II}}} \right]}{g(Q^{\mathrm{II}} - Q^{\mathrm{III}})} - \\ & - \frac{Q^{\mathrm{III}} K^{\mathrm{III}} \alpha v^{\mathrm{III}} \mathfrak{Cof}\, \alpha (h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{III}})}{g(Q^{\mathrm{II}} - Q^{\mathrm{III}})}. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Mit den Grenzbedingungen (2, 7) ergeben sich aus (2)—(5) folgende Relationen zwischen den Konstanten $K$ und den Amplituden $Z$

$$\left. \begin{aligned} K^{\mathrm{I}} \mathfrak{Sin}\, \alpha h^{\mathrm{I}} &= v^{\mathrm{I}} Z_1 \\ K_1^{\mathrm{II}} e^{\alpha h^{\mathrm{I}}} + K_2^{\mathrm{II}} e^{-\alpha h^{\mathrm{I}}} &= v_1^{\mathrm{II}} Z_1 \\ K_1^{\mathrm{II}} e^{\alpha h^{\mathrm{II}}} + K_2^{\mathrm{II}} e^{-\alpha h^{\mathrm{II}}} &= v_2^{\mathrm{II}} Z_2 \\ K^{\mathrm{III}} \mathfrak{Sin}\, \alpha (h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{III}}) &= v^{\mathrm{III}} Z_2. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Setzt man (6) in (3) und (5) ein, so ergeben sich zwei Gleichungen zur Bestimmung des Amplitudenverhältnisses $\frac{Z_1}{Z_2}$. Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{Z_1}{Z_2}$, so erhält man eine von allen willkürlichen Konstanten freie Relation zwischen $\beta$ und $\alpha$, die Frequenzengleichung. Wir benutzen neben den schon oben erwähnten wieder die Abkürzungen

$$q_1 = g(Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}}); \qquad q_2 = g(Q^{\mathrm{II}} - Q^{\mathrm{III}});$$

$$a^{\mathrm{I}} = \mathfrak{Ctg}\, \alpha h^{\mathrm{I}}; \qquad a^{\mathrm{II}} = \mathfrak{Ctg}\, \alpha (h^{\mathrm{I}} - h^{\mathrm{II}}); \qquad a^{\mathrm{III}} = \mathfrak{Ctg}\, \alpha (h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{III}}).$$

Dann lautet die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} 0 = & \; q_1 q_2 + q_2 Q^{\mathrm{II}} b v_1^{\mathrm{II}} - q_1 Q^{\mathrm{II}} b v_2^{\mathrm{II}} - q_2 Q^{\mathrm{I}} \alpha a^{\mathrm{I}} v^{\mathrm{I}2} + q_2 Q^{\mathrm{II}} \alpha a^{\mathrm{II}} v_1^{\mathrm{II}2} + \\ & + q_1 Q^{\mathrm{II}} \alpha a^{\mathrm{II}} v_2^{\mathrm{II}2} + q_1 Q^{\mathrm{III}} \alpha a^{\mathrm{III}} v^{\mathrm{III}2} - Q^{\mathrm{II}2} b^2 v_1^{\mathrm{II}} v_2^{\mathrm{II}} + \\ & + Q^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{II}} \alpha b a^{\mathrm{I}} v^{\mathrm{I}2} v_2^{\mathrm{II}} - Q^{\mathrm{II}2} \alpha b a^{\mathrm{II}} v_1^{\mathrm{II}2} v_2^{\mathrm{II}} + Q^{\mathrm{II}2} \alpha b a^{\mathrm{II}} v_1^{\mathrm{II}} v_2^{\mathrm{II}2} + \\ & + Q^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{III}} \alpha b a^{\mathrm{III}} v_1^{\mathrm{II}} v^{\mathrm{III}2} - Q^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{II}} \alpha^2 v^{\mathrm{I}2} v_2^{\mathrm{II}2} a^{\mathrm{I}} a^{\mathrm{II}} + Q^{\mathrm{II}2} \alpha^2 v_1^{\mathrm{II}2} v_2^{\mathrm{II}2} - \\ & - Q^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{III}} \alpha^2 v^{\mathrm{I}2} v^{\mathrm{III}2} a^{\mathrm{I}} a^{\mathrm{III}} + Q^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{III}} \alpha^2 a^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{III}} v_1^{\mathrm{II}2} v^{\mathrm{III}2}. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Um zunächst den Fall zweier Schichten mit freier Oberfläche zu behandeln, setzen wir $Q^{III} = 0$. Dann vereinfacht sich die Gleichung (bleibt aber immer noch eine algebraische Gleichung 4. Grades in $\beta$) in

$$(8)\quad \begin{cases} 0 = g q_1 + g\, Q^{II} b v_1^{II} - q_1 b v_2^{II} - g Q^{I} a a^{I} v^{I2} + g Q^{II} a a^{II} v_1^{II2} + q_1 a a^{II} v_2^{II2} - \\ \quad - Q^{II} b^2 v_1^{II} v_2^{II} + Q^{I} a b a^{I} v^{I2} v_2^{II} - Q^{II} a b a^{II} v_1^{II2} v_2^{II} + Q^{II} a b a^{II} v_1^{II} v_2^{II2} - \\ \quad - Q^{I} a^2 v^{I2} v_2^{II2} a^{I} a^{II} + Q^{II} a^2 v_1^{II2} v_2^{II2}. \end{cases}$$

Es liegt nahe, im Anschluß an § 8 zu vermuten, daß eine Zerlegung dieser Gleichung in zwei Faktoren möglich ist, deren einer die Oberflächenwellen der oberen Schicht allein, deren anderer die Grenzflächenwellen liefert. Diese Zerlegung ist, wie ebenfalls zu erwarten, nur möglich für $a^{II} = -1$, d. h. wenn die obere Schicht sehr tief ist. Dann lautet (8) zerlegt:

$$(8a)\quad \left[Q^{II} a v_1^{II2} + Q^{I} a v^{I2} a^{I} - Q^{II} b v_1^{II} - g\,(Q^{I} - Q^{II})\right]\left[a v_2^{II2} + b v_2^{II} - g\right] = 0.$$

Die zweite Klammer für sich allein gleich Null gesetzt, führt auf (12, 7a), die Wellengeschwindigkeit der Oberflächenwellen, die erste Klammer auf (12, 5), natürlich mit entsprechend abgeänderten Bezeichnungen.

Nehmen wir noch speziell an, daß auch die untere Schicht sehr tief ist und daß an der gemeinsamen Grenzfläche kein Geschwindigkeitssprung stattfindet, also $v_1^{II} = v^{I} = v_1$, so ergibt sich aus (8a), bzw. auch aus (12,5) oder (12,9)

$$(9)\qquad v_1 = \frac{1}{2}\,\frac{Q^{II}}{Q^{I} + Q^{II}}\,\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{Q^{II2}}{(Q^{I} + Q^{II})^2}\,\frac{b^2}{a^2} + \frac{g}{a}\,\frac{Q^{I} - Q^{II}}{Q^{I} + Q^{II}}}.$$

Genau wie bei der Diskussion jener Formel sieht man, daß auch hier die Änderung der Grundströmungsgeschwindigkeit mit der Höhe nur für das konvektive Glied eine gewisse Bedeutung hat, nicht aber für das dynamische, auf das ihr Einfluß verschwindend klein ist.

Im Falle dreier Schichten zwischen starren Grenzen wird durch die Ergebnisse von § 9 die Vermutung nahegelegt, daß auch hier, wenigstens bei unendlicher Tiefe des Systems, zwei mögliche Wellensysteme vorhanden sind, die zu beiden gemeinsamen Grenzflächen gehören.

Bei der Untersuchung dieser Frage wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß kein eigentlicher Windsprung vorhanden sei, sondern die mittlere Schicht II ein Gebiet stetiger Änderung der Grundströmung darstelle. Es zeigt sich, daß eine Zerlegung der Frequenzengleichung in zwei Faktoren möglich ist, wenn $a^{II} = -1$

ist, also wenn die mittlere Schicht sehr tief ist, und zwar läßt sich (7) schreiben, da $v^{I} = v_1^{II} = v_1$ und $v_2^{II} = v^{III} = v_2$ sein sollte,

$$\left[a(Q^{I}a^{I}+Q^{II})v_1^2 - v_1 b Q^{II} - q_1\right]\left[a(Q^{II}-Q^{III}a^{III})v_2^2+v_2 b Q^{II} - q_2\right] = 0. \quad (10)$$

Man bestätigt am schnellsten durch Ausmultiplizieren, daß diese Gleichung mit den angegebenen Vereinfachungen mit (7) identisch ist. Übrigens gilt die Zerlegung auch für Sprünge der Geschwindigkeit der Grundströmung an den Grenzflächen, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll. Wegen der Geschwindigkeit der Grenzflächenwellen kann auf die Ergebnisse von § 12 verwiesen werden, wonach die durch die Windänderung verursachten Modifikationen nur für das kinematische Glied eine gewisse Bedeutung haben.

Den Fall flacher mittlerer Schicht II wollen wir nur für stationäre Wellen untersuchen. Wir nehmen dabei die oberste und unterste Schicht sehr tief an, die zweite Schicht habe die geringe Tiefe $l$, also

$$a^{I} = 1; \qquad a^{II} = -\frac{1}{al}; \qquad a^{III} = -1;$$

$\beta$ haben wir wie früher gleich Null zu setzen. In der untersten Schicht I herrsche die konstante Grundströmung $U_1$, in der mittleren II ändere sie sich linear bis $U_2$, wobei $U_2 = U_1 + bl$; $U_2$ sei die konstante Grundströmung der III. Schicht. Die Geschwindigkeitsänderung der Grundströmung sei also wieder stetig. Wenn man beachtet, daß

$$b = \frac{U_2 - U_1}{l},$$

erhält man aus (7)

$$\left.\begin{aligned} & q_1 q_2 - Q^{II}\frac{U_1 U_2}{l}(q_1+q_2) + \\ & \quad + a\left[-Q^{I}U_1^2 q_2 - Q^{III} q_1 U_2^2 + Q^{II}\frac{U_1 U_2}{l}(Q^{I}U_1^2 + Q^{III}U_2^2)\right] + \\ & \quad + a^2(Q^{II2} + Q^{I}Q^{III})U_1^2 U_2^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Wir wollen diese Formel hier nur für zwei spezielle Fälle diskutieren.

Sei $U_1 = 0$, so wird

$$a = \frac{q_2}{U_2^2 Q^{III}}. \quad (11a)$$

Sei $U_2 = 0$, so wird

$$a = \frac{q_1}{U_1^2 Q^{I}}. \quad (11b)$$

Vergleich dieser beiden Formeln mit (7, 2) zeigt, daß die Wellenlänge wenigstens in diesen beiden Extremfällen die gleiche bleibt, ganz gleich, ob ein Windsprung vorhanden ist (7, 2) oder ob sich

der Wind stetig in einer dünnen Übergangsschicht ändert. Es liegt deshalb nahe, anzunehmen, daß auch im Fall, daß in Schicht I und III gleichzeitig die Windgeschwindigkeiten nicht verschwinden, die Wellenlänge durch das Bestehen einer kleinen stetigen Schicht linearer[1]) Windänderung nicht wesentlich verändert wird.

## § 14. Drei Schichten mit freier Oberfläche.

Das Flüssigkeitssystem, das wir jetzt behandeln wollen, soll sich von dem vorhergehenden nur dadurch unterscheiden, daß die obere Grenze der obersten Schicht nicht mehr starr, sondern frei beweglich ist. Die Störungsgrößen für die untere und mittlere Schicht sind dann von der gleichen Form wie (13, 1). Die Ausdrücke für die Störungsgrößen der obersten Schicht sind, wie leicht einzusehen ist, die gleichen wie für die Schicht III in (10, 3), wenn dort noch $\varkappa^{\mathrm{III}} = 0$ und also $N^{\mathrm{III}} = a$ gesetzt wird. Denn eine Windänderung soll ja im vorliegenden Falle nur in der mittleren Schicht II stattfinden.

Die Störungsgrößen lauten also

$$(1)\quad \begin{cases} \psi^{\mathrm{I}} = K^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,az\,e^{i(ax-\beta t)} \\ u^{\mathrm{I}} = -aK^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cof}\,az\,e^{i(ax-\beta t)} \\ w^{\mathrm{I}} = iaK^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Sin}\,az\,e^{i(ax-\beta t)} \\ p^{\mathrm{I}} = -Q^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{I}}av^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Cof}\,az\,e^{i(ax-\beta t)} \\ \psi^{\mathrm{II}} = \left(K_1^{\mathrm{II}}e^{az} + K_2^{\mathrm{II}}e^{-az}\right)e^{i(ax-\beta t)} \\ u^{\mathrm{II}} = -a\left(K_1^{\mathrm{II}}e^{az} - K_2^{\mathrm{II}}e^{-az}\right)e^{i(ax-\beta t)} \\ w^{\mathrm{II}} = ia\left(K_1^{\mathrm{II}}e^{az} + K_2^{\mathrm{II}}e^{-az}\right)e^{i(ax-\beta t)} \\ p^{\mathrm{II}} = -Q^{\mathrm{II}}\left[(b+av^{\mathrm{II}})K_1^{\mathrm{II}}e^{az} + (b-av^{\mathrm{II}})K_2^{\mathrm{II}}e^{-az}\right]e^{i(ax-\beta t)}. \end{cases}$$

Für die III. Schicht setzen wir zweckmäßig jetzt $-K^{\mathrm{III}}$ statt $K^{\mathrm{III}}$

$$(1)\quad \begin{cases} \psi^{\mathrm{III}} = K^{\mathrm{III}}\left[av^{\mathrm{III}2}\,\mathfrak{Cof}\,a(z-h^{\mathrm{III}}) + g\,\mathfrak{Sin}\,a(z-h^{\mathrm{III}})\right]e^{i(ax-\beta t)} \\ u^{\mathrm{III}} = -aK^{\mathrm{III}}\left[av^{\mathrm{III}2}\,\mathfrak{Sin}\,a(z-h^{\mathrm{III}}) + g\,\mathfrak{Cof}\,a(z-h^{\mathrm{III}})\right]e^{i(ax-\beta t)} \\ w^{\mathrm{III}} = iaK^{\mathrm{III}}\left[av^{\mathrm{III}2}\,\mathfrak{Cof}\,a(z-h^{\mathrm{III}}) + g\,\mathfrak{Sin}\,a(z-h^{\mathrm{III}})\right]e^{i(ax-\beta t)} \\ p^{\mathrm{III}} = -Q^{\mathrm{III}}av^{\mathrm{III}}K^{\mathrm{III}}\left[av^{\mathrm{III}2}\,\mathfrak{Sin}\,a(z-h^{\mathrm{III}}) + g\,\mathfrak{Cof}\,a(z-h^{\mathrm{III}})\right]e^{i(ax-\beta t)}. \end{cases}$$

---

[1]) In Wirklichkeit wird natürlich die Änderung der Windgeschwindigkeit in einer solchen Übergangsschicht einem komplizierteren Gesetz gehorchen und die Schichtdicke selbst mit der Zeit zunehmen. Davon soll in einem anderen Zusammenhang die Rede sein.

Durch dieselben Betrachtungen wie im vorhergehenden Paragraphen erhält man als Amplituden der beiden inneren Grenzflächen

$$Z_1 = \frac{Q^{\mathrm{I}} K^{\mathrm{I}} a v^{\mathrm{I}} \mathfrak{Cof}\, a h^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}} [(b + a v_1^{\mathrm{II}}) K_1^{\mathrm{II}} e^{a h^{\mathrm{I}}} + (b - a v_1^{\mathrm{II}}) K_2^{\mathrm{II}} e^{-a h^{\mathrm{I}}}]}{g(Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}})} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_2 = & \frac{Q^{\mathrm{II}} [(b + a v_2^{\mathrm{II}}) K_1^{\mathrm{II}} e^{a h^{\mathrm{II}}} + (b - a v_2^{\mathrm{II}}) K_2^{\mathrm{II}} e^{a h^{\mathrm{II}}}]}{g(Q^{\mathrm{II}} - Q^{\mathrm{III}})} - \\ & - \frac{Q^{\mathrm{III}} a v^{\mathrm{III}} K^{\mathrm{III}} \mathfrak{Sin}\, a (h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{III}}) [a v^{\mathrm{III}2} + g \mathfrak{Ctg}\, a (h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{III}})]}{g(Q^{\mathrm{II}} - Q^{\mathrm{III}})} . \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wie ein Vergleich mit (14, 2) und (13, 3) zeigt, stimmen beide Ausdrücke für die Amplitude der unteren inneren Grenzfläche miteinander überein, was ja auch selbstverständlich ist.

Die Relationen zwischen den $K$ und den $Z$, wie sie sich aus den Grenzbedingungen (2, 7) ergeben, lauten

$$\left. \begin{aligned} K^{\mathrm{I}} \mathfrak{Sin}\, a h^{\mathrm{I}} &= v^{\mathrm{I}} Z_1 \\ K_1^{\mathrm{II}} e^{a h^{\mathrm{I}}} + K_2^{\mathrm{II}} e^{-a h^{\mathrm{I}}} &= v_1^{\mathrm{II}} Z_1 \\ K_1^{\mathrm{II}} e^{a h^{\mathrm{II}}} + K_2^{\mathrm{II}} e^{-a h^{\mathrm{II}}} &= v_2^{\mathrm{II}} Z_2 \\ K^{\mathrm{III}} \mathfrak{Sin}\, a (h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{III}}) &= \frac{v^{\mathrm{III}} Z_2}{a v^{\mathrm{III}2} \mathfrak{Ctg}\, a (h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{III}}) + g} . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wir wollen der Einfachheit halber wieder bald annehmen, daß keine Windsprünge auftreten, so daß also

$$U^{\mathrm{I}} = U_1^{\mathrm{II}}, \qquad U_2^{\mathrm{II}} = U^{\mathrm{III}}$$

und damit

$$v_1 = v^{\mathrm{I}} = v_1^{\mathrm{II}}, \qquad v_2 = v_2^{\mathrm{II}} = v^{\mathrm{III}}$$

wird. Dann erhält man mit den gleichen Abkürzungen wie Seite 71 durch den im § 13 beschriebenen Rechenvorgang als Frequenzgleichung

$$\left. \begin{aligned} 0 = {} & g q_1 q_2 + g q_2 b Q^{\mathrm{II}} v_1 - g q_1 b Q^{\mathrm{II}} v_2 - g q_2 a (a^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{I}} - a^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{II}}) v_1^2 + \\ & + g q_1 a Q^{\mathrm{II}} (a^{\mathrm{II}} + a^{\mathrm{III}}) v_2^2 - b^2 g Q^{\mathrm{II}2} v_1 v_2 - a b q_1 Q^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{III}} v_2^3 + \\ & + b a g Q^{\mathrm{II}} (a^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{I}} - a^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{II}}) v_1^2 v_2 + b a g Q^{\mathrm{II}2} (a^{\mathrm{II}} + a^{\mathrm{III}}) v_1 v_2^2 + \\ & + a^2 q_1 (Q^{\mathrm{III}} + Q^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{III}}) v_2^4 + a^2 g Q^{\mathrm{II}} (Q^{\mathrm{II}} - a^{\mathrm{I}} a^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{I}} - a^{\mathrm{I}} a^{\mathrm{III}} Q^{\mathrm{I}} + \\ & + a^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{III}} Q^{\mathrm{II}}) v_1^2 v_2^2 - b^2 a Q^{\mathrm{II}2} a^{\mathrm{III}} v_1 v_2^3 + b a^2 Q^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{III}} (Q^{\mathrm{I}} a^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{II}}) v_1^2 v_2^3 + \\ & + b a^2 Q^{\mathrm{II}2} (Q^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{III}} + Q^{\mathrm{III}}) v_1 v_2^4 + a^3 (a^{\mathrm{III}} Q^{\mathrm{II}2} - a^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{III}} + \\ & + a^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{II}} Q^{\mathrm{III}} - a^{\mathrm{I}} a^{\mathrm{II}} a^{\mathrm{III}} Q^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{II}}) v_1^2 v_2^4 . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Eine ausführliche Diskussion dieser Gleichung 6. Grades in $\beta$ ist hier nicht beabsichtigt. Ohne Schwierigkeit sieht man aber, daß im Falle sehr großer Tiefe der III. (obersten) Schicht, d. h. $a^{III} = -1$, die Gleichung eine Zerlegung gestattet in

$$(5a) \begin{cases} 0 = (g - \alpha v_2^2)[q_1 q_2 + q_2 Q^{II} b v_1 - q_1 Q^{II} b v_2 - q_2 \alpha (Q^I a^I - Q^{II} a^{II}) v_2^1 + \\ + q_1 \alpha (Q^{II} a^{II} - Q^{III}) v_2^2 - Q^{II^2} b^2 v_1 v_2 + Q^{II} (Q^I a^I - Q^{II} a^{II}) \alpha b v_1^2 v_2 + \\ + Q^{II} \alpha b (Q^{II} a^{II} - Q^{III}) v_1 v_2^2 - \alpha^2 v_1^2 v_2^2 (Q^I Q^{II} a^I a^{II} - Q^{II^2} - \\ - Q^I Q^{III} a^I + Q^{II} Q^{III} a^{II})]. \end{cases}$$

In einem System von drei Schichten mit freier Oberfläche und sehr tiefer Deckschicht sind also, wie aus der ersten Klammer ersichtlich, die Stokes'schen Wellen auf tiefem Wasser möglich und ferner die gleichen Wellen wie in drei Schichten zwischen starren obersten und untersten Grenzflächen, was aus der Übereinstimmung zwischen der zweiten Klammer und der entsprechenden Frequenzgleichung (13, 7) hervorgeht. Dabei muß in (13, 7) noch dem Fehlen der Windsprünge und der unendlichen Ausdehnung der obersten Schicht Rechnung getragen werden, um sie mit (5a) zu vergleichen. Übrigens hätte sich die durch (5a) ausgedrückte Zerlegungsmöglichkeit auch beim Vorhandensein von Windsprüngen und Windänderung in den beiden anderen Schichten ergeben, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll. Die in § 13 gemachten Bemerkungen über die Wellen an den inneren Grenzflächen, insbesondere die weitere Zerlegungsmöglichkeit bei unendlich tiefer mittlerer Schicht lassen sich also auch auf den Fall einer freien Oberfläche übertragen.

Bei unendlicher Ausdehnung der beiden obersten Schichten haben wir also zunächst Wellen an der 1. Grenzfläche, die sich so verhalten, als ob die oberste Schicht III erstarrt wäre, dann Wellen an der 2. Grenzfläche, die sich so verhalten, als ob die unterste Schicht I und die freie Oberfläche erstarrt wären, und schließlich drittens Oberflächenwellen, die sich so verhalten, als ob die beiden untersten Schichten erstarrt wären. Die Modifikationen der Wellengeschwindigkeit infolge der linearen Änderung der Strömungsgeschwindigkeit in der mittleren Schicht erreichen einen merklichen Betrag wieder höchstens für die konvektiven Glieder. In die Oberflächenwellengeschwindigkeit gehen sie natürlich überhaupt nicht ein.

Alle drei Wellensysteme können sich superponieren, wobei auch verschiedene Wellenlängen auftreten können.

# Abschnitt IV.

# Wellenbewegungen eines isotherm geschichteten Gases.

## § 15. Allgemeine Bemerkungen über den Fall eines isotherm geschichteten Gases.

Neben den in den Abschnitten II und III behandelten Fällen wird (2, 5) noch zu einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wenn die betrachtete Flüssigkeit, oder besser das Gas, zwar nach einem beliebigen barotropen Gesetz kompressibel ist, aber die Dichte exponentiell mit der Höhe abnimmt oder, was für ein (ideales) Gas auf dasselbe hinausläuft, wenn die Temperatur nicht mit der Höhe veränderlich ist. Schließlich muß auch noch die Geschwindigkeit der Grundströmung konstant sein.

In einer Atmosphäre mit der überall gleichen Temperatur $T$ gilt im ungestörten Zustand ($R$ = Gaskonstante)

$$Q = \frac{P}{RT}.$$

Daraus ergibt sich für $\Gamma$, das sich, wie hier nochmals erwähnt sei, auf die geometrische Verteilung der Zustandsgrößen bezieht,

$$\Gamma = \frac{dQ}{dP} = \frac{1}{RT}. \tag{1}$$

$\Gamma$ ist also das reziproke Quadrat der Newtonschen Schallgeschwindigkeit.

Für ein bestimmtes Teilchen sollen die Zustandsänderungen nach einer bestimmten Polytropen erfolgen, so daß

$$\tilde{p}\tilde{q}^{-k} = PQ^{-k} \tag{2}$$

mit

$$k = \frac{c_p - \bar{c}}{c_v - \bar{c}}.$$

$c_p$ und $c_v$ sind die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen. $\bar{c}$ ist die Wärmekapazität längs der betreffenden Polytrope. Bei den Aufgaben der Meteorologie wird man im allgemeinen $k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}40$, also $\bar{c} = 0$ setzen, d. h. adiabatische Zustandsänderungen annehmen.

(2) können wir schreiben

$$q = P^{-\frac{1}{k}}\tilde{p}^{\frac{1}{k}}Q.$$

Um $\gamma$ zu bestimmen, haben wir diese Gleichung nach $\tilde{p}$ zu differentiieren. Da die Abweichungen vom Grundzustand nur klein sein

sollen, können wir den Differentialquotienten $\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{p}}$ an der durch $Q$ und $P$ charakterisierten Stelle wählen, also setzen

$$(3) \qquad \gamma = \left(\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{p}}\right)_{P,Q} = \left(\frac{1}{k}\tilde{p}^{\frac{1}{k}-1} P^{-\frac{1}{k}} Q\right)_{P,Q} = \frac{1}{k}\frac{Q}{P} = \frac{1}{kRT} = \frac{\Gamma}{k}.$$

Es ist also neben $\Gamma$ auch $\gamma$ im Falle isothermer Zustandsänderung von der Höhe $z$ unabhängig. $\gamma$ ist, wie aus (3) ersichtlich, das reziproke Quadrat der Laplaceschen Schallgeschwindigkeit.

Die Gleichung des Grundzustandes (2, 1) lautet

$$(4) \qquad \frac{1}{Q}\frac{dP}{dz} = -g + 2\Omega_y U = -g^*.$$

Dabei ist die Abweichung der fiktiven, durch die Coriolisbeschleunigung verminderten Schwerebeschleunigung $g^*$ von $g$, wie schon früher angegeben, sehr gering. Wir können also $g^* = g$ setzen.

Die Differentialgleichung der Vertikalamplitude lautet jetzt

$$(5) \qquad \begin{cases} C'' - g\Gamma C' + \\ + \left\{-a^2 + \gamma(\beta - aU)^2 + \gamma \frac{ag - 2\Omega_y\beta}{(\beta - aU)^2}\left[\left(\frac{\Gamma}{\gamma} - 1\right)ga + 2\Omega_y\beta\right]\right\} C = 0. \end{cases}$$

Als allgemeines Integral ergibt sich

$$(6) \qquad C = e^{\frac{g\Gamma}{2}z}(K_1 e^{Nz} + K_2 e^{-Nz}),$$

wobei in Analogie zu früherem

$$(7) \qquad N^2 = \frac{g^2\Gamma^2}{4} + a^2 - \gamma(\beta - aU)^2 - \gamma\frac{ag - 2\Omega_y\beta}{(\beta - aU)^2}\left[\left(\frac{\Gamma}{\gamma} - 1\right)ag + 2\Omega_y\beta\right]$$

ist. Dabei kann $N$ ähnlich wie § 4 auch komplex sein. Die Amplituden der übrigen Störungsgrößen ergeben sich nach Bestimmung von $C$ aus (3, 6—8)

$$(8) \qquad A = i\gamma\frac{2\Omega_y(\beta - aU) - ag}{a^2 - \gamma(\beta - aU)^2} C + i\frac{a}{a^2 - \gamma(\beta - aU)^2} C'$$

$$(9) \qquad D = i\frac{a\,2\Omega_y - \gamma g(\beta - aU)}{a^2 - \gamma(\beta - aU)^2} QC + i\frac{\beta - aU}{a^2 - \gamma(\beta - aU)^2} QC'$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{E}{Q} = i\frac{a\gamma(\beta - aU)\,2\Omega_y + g(\Gamma - \gamma)a^2 - g\gamma\Gamma(\beta - aU)^2}{(\beta - aU)[a^2 - \gamma(\beta - aU)^2]} C + \\ \qquad + i\frac{\gamma(\beta - aU)}{a^2 - \gamma(\beta - aU)^2}. \end{cases}$$

Aus (8) folgt für das Verhältnis der horizontalen zur vertikalen Amplitude der Störungsgeschwindigkeit

$$(11) \qquad \frac{A}{C} = \frac{i}{a^2 - \gamma(\beta - aU)^2}\left[\gamma\,2\Omega_y(\beta - aU) - ag\gamma + a\frac{C'}{C}\right].$$

Im Falle $\left(\frac{\beta-\alpha U}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\gamma}$, das ist bei Laplacescher Schallgeschwindigkeit, ist also die Vertikalamplitude $C$ unendlich klein im Verhältnis zu $A$. Die Schallwellen sind eben longitudinal. Je mehr sich die Wellengeschwindigkeit der Laplaceschen Schallgeschwindigkeit nähert, um so mehr überwiegt die Komponente in Richtung der Wellenausbreitung die dazu senkrechte $C$.

## § 16. Eine Schicht.

Wir nehmen zuerst die beiden Grenzen, sie mögen die Lage $z = 0$ und $z = h$ haben, als starr an. Dann folgt aus den Grenzbedingungen für $N^2 > 0$

$$w_{z=0} = 0 \qquad \text{und} \qquad w_{z=h} = 0$$

$$K_1 + K_2 = 0$$

$$K_1 e^{Nh} + K_2 e^{-Nh} = 0,$$

also, wenn dieses lineare homogene Gleichungssystem nicht nur die triviale Nullösung für $K_1$ und $K_2$ haben soll,

$$e^{-Nh} = e^{Nh}, \qquad \text{d. h.} \qquad N^2 = 0.$$

Aber da dann $C = e^{\frac{g\Gamma}{2}z}(K_1 + K_2 z)$, erhält man aus (15,6—10) auch in diesem Fall für die Größen der Störungsamplituden den Wert 0. Es sind also keine Wellenbewegungen von der gesuchten transversalen Form zwischen starren Grenzen möglich, sofern nicht $N$ imaginär ist.

Für imaginäres $N = iN'$, wo $N'$ reell ist, wird aus

$$C = K_1 e^{Nz} + K_2 e^{-Nz},$$

da auch $K_1$ und $K_2$ als komplex angesehen werden können,

$$C = K_1' \cos N'z + K_2' \sin N'z,$$

wo in bekannter Weise bloß der Realteil von $C$ genommen ist und $K_1'$ und $K_2'$ neue reelle Konstanten bedeuten. Aus den Grenzbedingungen ergibt sich

$$C_{z=0} = 0 = K_1'$$

und

$$C_{z=h} = 0 = K_2' \sin N'h.$$

Da $K_2'$ nicht verschwinden soll, muß $N'h = n\pi$ sein, um die Bedingung an der oberen starren Grenzfläche zu erfüllen. Daraus folgt

$$N' = \frac{n\pi}{h}, \qquad n = 1, 2 \ldots$$

als Frequenzgleichung für diesen Fall. Links steht eine Relation zwischen Wellengeschwindigkeit und Wellenlänge, so daß also zu

jeder Wellenlänge bei gegebenen äußeren Bedingungen eine unendliche Schar diskreter Wellengeschwindigkeiten gehört (Eigenwerte). Wegen seines geringen meteorologischen Interesses wollen wir diesen Fall aber nicht näher diskutieren. Es sei nur noch folgendes bemerkt: im inkompressiblen inhomogenen Fall muß bei Vernachlässigung der Erdrotation im vorliegenden Falle wegen $N^2 < 0$

$$v^{*2} < \frac{g^2 \Gamma}{\frac{g^2 \Gamma^2}{4} + \alpha^2}$$

sein. Im kompressiblen Fall, lautet die Ungleichung bei Vernachlässigung der Erdrotation

$$v^{*2} < \frac{g^2(\Gamma - \gamma)}{\frac{g^2 \Gamma^2}{4} + \alpha^2(1 - \gamma v^{*2})}.$$

Solange man $\gamma v^{*2}$ wesentlich kleiner als eins ansehen kann, ist also der Höchstwert vom $v^*$ im kompressiblen Fall aus dem im inkompressiblen Fall durch Multiplikation mit $\sqrt{\frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma}} = 0{,}534$ zu entnehmen. Mit dieser Annahme und $T = 273^0$ ist die folgende kleine Tabelle berechnet.

Tabelle IX.

Höchstwerte der Wellengeschwindigkeit in einer Schicht zwischen starren Grenzen.

| $L$ . . . . . in Metern | 50 | 100 | 250 | 500 | 1000 | 2500 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| inkompressibel . . . . | 0,28 | 0,56 | 1,40 | 2,80 | 5,56 | 13,95 m/sec |
| kompressibel . . . . . | 0,15 | 0,30 | 0,75 | 1,50 | 2,97 | 7,45 m/sec |

| $L$ . . . . . in Metern | 5000 | 7500 | 10000 | 25000 | 50000 | 100000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| inkompressibel . . . . | 28,0 | 41,6 | 55,5 | 135 | 251 | 395 m/sec |
| kompressibel . . . . . | 15,0 | 22,2 | 29,7 | 72,2 | 134 | 211 m/sec |

Da $\gamma v^{*2}$ im Nenner gegen eins vernachlässigt ist, ist die Abschätzung in der unteren Reihe bei größeren Wellenlängen zu ungünstig.

Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, daß derartige Wellen auch in einer nicht geschichteten inkompressiblen Flüssigkeit mit starren Grenzen möglich sind, wenn die Wirkung der Erdrotation, freilich in vollständigerer Weise als hier, mit in Betracht gezogen wird. H. Solberg 1928 hat diesen von ihm als Trägheitswellen bezeichneten Typus entdeckt, und V. Bjerknes und H. Solberg 1929 erblicken darin eine Erklärungsmöglichkeit für das Auftreten der Turbulenz.

Außer diesen Wellen sind natürlich in einer Flüssigkeitsschicht zwischen starren Grenzen noch die longitudinalen möglich. Gehen wir mit der Annahme $C = 0$, $A \neq 0$ in die Differentialgleichungen (3, 4a) ein, und erinnern wir uns, daß $U$ konstant sei sollte, so ergibt sich das einfachere System

$$\left.\begin{aligned} -i(\beta - aU)A + \frac{ia}{Q}D &= 0 \\ -2\Omega y A + \frac{D'}{Q} + \frac{E}{Q}g &= 0 \\ -i(\beta - aU)E + iaQA &= 0 \\ iaQA - i\gamma(\beta - aU)D &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Da sich hieraus für $A$ die beiden Ausdrücke

$$A = \frac{aD}{(\beta - aU)Q} \quad \text{und} \quad A = \frac{\gamma(\beta - aU)}{aQ}D$$

ergeben, folgt

$$\frac{\beta - aU}{a} = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2}$$

Das sind die Schallwellen, die sich mit Laplacescher Schallgeschwindigkeit fortpflanzen. Wir wollen uns aber näher mit den akustischen Problemen nicht befassen. Immerhin mag dieser kurze Hinweis zeigen, daß die Störungstheorie der atmosphärischen Bewegungen auch zur Behandlung akustischer Probleme geeignet ist.

Wir gehen nunmehr zu dem meteorologisch viel interessanteren Fall einer Schicht mit freier Oberfläche über, obwohl natürlich die Atmosphäre keine scharfe obere Grenze haben kann. Die Gleichung dieser freien Oberfläche sei im ungestörten Zustand $z = h$, so daß also $h$ die mittlere Tiefe der ganzen Atmosphäre ist. Für dieses System haben wir in (3, 15) die Frequenzgleichung schon allgemein aufgestellt, und wir brauchen jetzt nur noch die partikulären Integrale.

$$C_1 = e^{\frac{g\Gamma z}{2} + Nz} \quad \text{und} \quad C_2 = e^{\frac{g\Gamma z}{2} - Nz}$$

der Differentialgleichung (15, 5) einzusetzen. Das gibt, wenn zur Abkürzung $\frac{\beta - aU}{a} = v^*$ gesetzt wird,

$$g - 2\,\Omega_y v^* - \left(\frac{g\Gamma}{2} + N\,\mathfrak{Ctg}\,Nh\right)v^{*2} = 0. \tag{3}$$

Da $v^*$ auch in dem Ausdruck für $N$ vorkommt, liegt also wieder eine transzendente Gleichung in $v^*$ vor. Auch hier gilt, was in § 4 über das Imaginärwerden von $N$ gesagt wurde.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Wellenlängen sehr groß gegen die Schichttiefen sind. Dann ergibt sich ohne Berücksichtigung der Erdrotation

$$(4)\qquad v^* = \sqrt{\frac{gh}{1+\frac{g\Gamma h}{2}}}.$$

Das ist, wie ein Vergleich mit (5, 10) zeigt, die gleiche Formel wie im inkompressiblen Fall. Bei langen Wellen auf seichtem Wasser (vgl. dazu weiter unten) spielt also die Kompressibilität eine geringe, im Grenzfalle gar keine Rolle. Diese Tatsache steht auch im Einklang mit gewissen allgemeinen Schlüssen aus dem Helmholtzschen Prinzip der geometrisch ähnlichen Bewegungen (Helmholtz 1889).

Tabelle X.

Geschwindigkeit langer Wellen an der Oberfläche einer isothermen Atmosphäre[1]).

| $h$ \ $T$ | 230° | 240° | 250° | 260° |
|---|---|---|---|---|
| 500 m | 68,8 m/sec | 68,8 m/sec | 68,9 m/sec | 69,0 m/sec |
| 1000 „ | 96,0 „ | 96,0 „ | 96,2 „ | 96,2 „ |
| 2000 „ | 131,0 „ | 131,5 „ | 132,0 „ | 132,0 „ |
| 3000 „ | 155,9 „ | 156,2 „ | 156,8 „ | 157,3 „ |
| 4000 „ | 174,7 „ | 175,0 „ | 175,8 „ | 176,4 „ |
| 5000 „ | 190,0 „ | 190,8 „ | 192,0 „ | 192,5 „ |

| $h$ \ $T$ | 270° | 280° | 290° | Keine Dichteabnahme |
|---|---|---|---|---|
| 500 m | 69,0 m/sec | 69,0 m/sec | 69,0 m/sec | 70,2 m/sec |
| 1000 „ | 96,4 „ | 96,5 „ | 96,6 „ | 99,4 „ |
| 2000 „ | 132,0 „ | 133,0 „ | 133,0 „ | 140,2 „ |
| 3000 „ | 157,7 „ | 158,2 „ | 158,6 „ | 171,9 „ |
| 4000 „ | 177,2 „ | 178,0 „ | 178,5 „ | 198,2 „ |
| 5000 „ | 193,8 „ | 194,3 „ | 195,4 „ | 222,0 „ |

Tabelle X gibt für verschiedene Temperaturen und für verschiedene Höhen der wirklichen Flüssigkeitsschicht die Wellengeschwindigkeiten in m/sec an. Man sieht, wie ja auch schon aus den entsprechenden Betrachtungen von § 5 bekannt ist, daß die Modifikationen der Wellengeschwindigkeit nur gering sind.

[1]) Die Annahme einer isothermen Atmosphäre mit endlicher Höhe ist selbstverständlich nur eine zu Vergleichszwecken dienende Fiktion.

Im Anschluß an diese Rechnungen ist noch eine Bemerkung nötig über die Genauigkeit der zu Formel (4) führenden Approximation. Im Falle homogener Flüssigkeit setzt man ja bei der Annahme langer Wellen $\mathfrak{Ctg}\, a h = \frac{1}{(a h)}$, was für beliebig große $h$ immer nur einen beliebig kleinen Fehler ausmacht, wenn $a$ genügend klein, d. h. die Wellenlänge genügend groß wird. Im vorliegenden Fall liegen die Dinge aber komplizierter, weil an die Stelle von $a$ der Ausdruck

$$N = \sqrt{\frac{g^2 \Gamma^2}{4} + a^2 - \gamma\,(\beta - a\,U)^2 - (\Gamma - \gamma)\, g^2 \left(\frac{a}{\beta - a\,U}\right)^2}$$

tritt, wobei von der Erdrotation als unwesentlich abgesehen wird. Wenn hierin $a$ beliebig klein wird, bleibt der erste Summand unter der Wurzel konstant, etwa von der Größenordnung $10^{-8}$, der zweite Summand wird sehr klein, der dritte und vierte Summand wirken in einem für unsere Zwecke günstigen Sinne, weil sie den Betrag von $N$ herabdrücken. Immerhin müssen wir auch bei sehr langen Wellen ungünstigenfalls mit $10^{-4}$ als Größenordnung für $N$ rechnen. Setzt man $h = 5000$ m, so sieht man durch eine Überschlagsrechnung, daß dabei unter Umständen schon Fehler bis 10 % auftreten können, wenn eben nicht die beiden Subtrahenden den Wert von $N$ verkleinern. Es mag hier genügen, auf die Notwendigkeit derartiger Fehlerabschätzungen hinzuweisen. Bei praktischen Aufgaben wird man zweckmäßig Näherungsverfahren anwenden oder die Fehler nach Verfahren abschätzen, die den speziellen Bedingungen angepaßt sind.

Um die Wirkung der Erdrotation auf die Geschwindigkeit langer Oberflächenwellen zu untersuchen, setzen wir in (3) $\Omega_y \neq 0$ und wieder $\mathfrak{Ctg}\, N h = \frac{1}{N h}$. Dann erhält man

$$v^* = \pm \sqrt{\frac{g h}{1 + \frac{g \Gamma h}{2}}} \sqrt{1 + \frac{\Omega_y^2 h}{\left(1 + \frac{g \Gamma h}{2}\right) g}} - \frac{\Omega_y h}{1 + \frac{g h \Gamma}{2}}. \tag{5}$$

Wir wählen Mgn[1]) $h = 10^3$. Ferner ist Mgn $g = 10^1$ und als Höchstwert Mgn $\Omega_y = 10^{-4}$. Damit wird

$$\text{Mgn} \sqrt{\frac{g h}{1 + \frac{g \Gamma h}{2}}} = 10^2 \qquad \text{Mgn} \frac{\Omega_y^2 h}{\left(1 + \frac{g \Gamma h}{2}\right) g} = 10^{-6}$$

$$\text{Mgn} \frac{\Omega_y h}{1 + \frac{g \Gamma h}{2}} = 10^{-1}.$$

[1]) Mgn = Magnitudo, bedeutet die Größenordnung der betreffenden Größe, also hier, daß $h$ von der Größenordnung 1000 m sein soll.

Unter der zweiten Wurzel ist also das Glied von der Größenordnung $10^{-6}$ gegen das Glied von der Größenordnung $10^{0}$ zu vernachlässigen. Auch das Glied $\frac{\Omega_y h}{1+\frac{g\Gamma h}{2}}$ ist mindestens 1000 mal kleiner als das erste Glied. Also können die Wirkungen der Erdrotation[1]) gegenüber den anderen Faktoren vernachlässigt werden. Jedoch sei darauf aufmerksam gemacht, daß nach (5) die Wirkung der Erdrotation darin besteht, daß sich die Wellenstörung in beiden Richtungen mit etwas verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzt.

Haben wir es mit Schichten zu tun, deren Tiefe sehr groß ist im Verhältnis zur Länge der betrachteten Wellen, so können wir in (3) $\mathfrak{Ctg}\, Nh = 1$ setzen. Lassen wir den geringen Einfluß der Erdrotation unberücksichtigt, so ergibt sich als Frequenzgleichung

$$(6)\qquad v^{*6} - \frac{1}{\gamma} v^{*4} - \frac{g^2}{a^2} v^{*2} + \frac{g^2}{\gamma a^2} = 0.$$

Da sich diese Gleichung schreiben läßt

$$(6a)\qquad \left(v^{*2} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(v^{*2} - \frac{g}{a}\right)\left(v^{*2} + \frac{g}{a}\right) = 0,$$

so ergibt sich das Resultat, daß in einer sehr tiefen Schicht mit freier Oberfläche neben Schallwellen noch die Stokes'schen Wellen auf sehr tiefem Wasser auftreten können. Da sich aus der 3. Klammer imaginäre Werte für $v^*$ ergeben, also komplexe für $\beta$, stellen diese Typen einen instabilen Fall dar. Denn der Periodenfaktor $e^{i(\alpha x - \beta t)}$ hat dann einen unperiodischen Anteil, der bewirkt, daß die Störungsgrößen mit der Zeit über alle Grenzen wachsen[2]). Über die Güte der Approximation $\lim \mathfrak{Ctg}\, Nh = 1$ sei hier nur bemerkt, daß sie mit zunehmender Tiefe der Schicht natürlich immer besser wird. Nehmen wir wie Seite 83 an, daß $N$ von der Größenordnung $10^{-4}$ ist, was, wie wir sahen, auch bei sehr langen Wellen zutreffen kann, so muß $Nh \geqq 2{,}450$ sein, damit unsere Approximation $\mathfrak{Ctg}\, Nh = 1$ bis auf 1 % richtig ist. Daraus folgt mit obigem Wert für $N\, h \geqq 24{,}5$ km. Im übrigen wird man sich über ihre praktische Brauchbarkeit wie im Falle langer Wellen auf seichtem Wasser immer von Fall zu Fall orientieren.

---

[1]) Es mag an dieser Stelle nochmals betont werden, daß wir durch unseren Ansatz (Bewegung in einer Vertikalebene) nur die eine horizontale Komponente der Erdrotation berücksichtigen.

[2]) Die Frage, wann die Wellen instabil werden, ist hier nicht mit behandelt worden. Vorstehende Bemerkung zeigt, auf welche Weise die Stabilitätsuntersuchung vor sich gehen kann, wie ja auch aus der Hydrodynamik bekannt ist.

Wir wollen nun noch kurz die Bewegungen der Wasserteilchen im Falle von Wellenbewegungen einer Schicht mit freier Oberfläche diskutieren. Da an der starren Grenzfläche $z = 0$ die Vertikalkomponente der Störungsgeschwindigkeit verschwinden muß, folgt für die Konstanten

$$K_1 = -K_2 = \frac{K}{2},$$

und wenn wir diese neue Konstante $K$ in die Ausdrücke (15, 6 und 8 – 10) einsetzen, ergibt sich für die Störungsgrößen, wenn wir statt der Exponentialfunktion die Realteile benutzen,

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{K e^{\frac{g\Gamma}{2}z}}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\left\{\left[\alpha g\left(\frac{\Gamma}{2}-\gamma\right)+2\Omega_y\gamma(\beta-\alpha U)\right]\mathfrak{Sin}\,Nz+\right.\\
&\qquad\left.+\alpha N\,\mathfrak{Cos}\,Nz\right\}\sin(\alpha x-\beta t)\\
w &= K e^{\frac{g\Gamma}{2}z}\,\mathfrak{Sin}\,Nz\cos(\alpha x-\beta t)\\
p &= -\frac{KQ e^{\frac{g\Gamma}{2}z}}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\left\{\left[2\,\Omega_y\alpha+g(\beta-\alpha U)\left(\frac{\Gamma}{2}-\gamma\right)\right]\mathfrak{Sin}\,Nz+\right.\\
&\qquad\left.+(\beta-\alpha U)N\,\mathfrak{Cos}\,Nz\right\}\sin(\alpha x-\beta t)\\
q &= -\frac{KQ e^{\frac{g\Gamma}{2}z}}{\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2}\left\{\left[\alpha\gamma\, 2\Omega_y+\alpha^2 g\,\frac{\Gamma-\gamma}{\beta-\alpha U}-g\,\frac{\gamma\Gamma}{2}(\beta-\alpha U)\right]\times\right.\\
&\qquad\left.\times\,\mathfrak{Sin}\,Nz+N\gamma(\beta-\alpha U)\,\mathfrak{Cos}\,Nz\right\}\sin(\alpha x-\beta t).
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$N$ kann unter Umständen imaginär werden. Wir setzen $N = iN'$, wo also $N'$ reell sein soll. Da nun

$$\mathfrak{Sin}\,iN'z = i\sin N'z \qquad \text{und} \qquad iN'\,\mathfrak{Cos}\,iN'z = iN'\cos N'z$$

ist, vertauschen in diesem Falle in (7) $\sin(\alpha x-\beta t)$ und $\cos(\alpha x-\beta t)$ ihre Plätze. Es war bei Außerachtlassung der Erdrotation nach (15, 7)

$$N^2 = \frac{g^2\Gamma^2}{4}+\alpha^2-\gamma(\beta-\alpha U)^2-g^2\alpha^2\,\frac{\Gamma-\gamma}{(\beta-\alpha U)^2}.$$

Setzt man hierin für den Fall von Oberflächenwellen auf tiefem Wasser

$$\left(\frac{\beta-\alpha U}{\alpha}\right)^2 = \frac{g}{\alpha}, \qquad (15, 6a)$$

so wird

$$N^2 = \left(\frac{g\Gamma}{2}-\alpha\right)^2.$$

In diesem Falle ist also $N$ reell.

Der Betrag des Verhältnisses der Horizontal- zur Vertikalamplitude ist nach (15, 11), wenn wir wieder die Wirkung der Erdrotation vernachlässigen und für $\frac{C'}{C}$ seinen aus (7) folgenden Wert einsetzen

$$\left|\frac{A}{C}\right| = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\gamma v^{*2}}\left[g\left(\frac{\Gamma}{2}-\gamma\right)+N\,\mathfrak{Ctg}\,Nz\right]. \tag{8}$$

Da $\mathfrak{Ctg}\,Nz$ mit wachsendem $z$ abnimmt, sind die Bewegungen der Teilchen in größeren Höhen immer weniger flach als am Erdboden, was ja auch anschaulich sofort einleuchtet.

Wenn wir lange Wellen in flachen Schichten untersuchen, so erhalten wir mit (4) aus (8)

$$\left|\frac{A}{C}\right| = \frac{L}{2\pi}\,\frac{1+\frac{g\Gamma h}{2}}{1+gh\left(\frac{\Gamma}{2}-\gamma\right)}\left[g\left(\frac{\Gamma}{2}-\gamma\right)+\frac{1}{z}\right]. \tag{9}$$

Aus (9) geht hervor, daß in ein und derselben Höhe bei längeren Wellen die horizontale Geschwindigkeitsamplitude in stärkerem Maße die vertikale überwiegt, als bei kürzeren Wellen. Haben wir beispielsweise eine Luftschicht mit der konstanten Temperatur $T = 260^0$. Die Höhe der Schicht sei 3 km. (Vgl. dazu Seite 82, Fußnote.) Dann ergeben sich für die Wellenlänge 50 km die in Tabelle XI angegebenen Werte des Amplitudenverhältnisses $\left(\frac{A}{C}\right)$ in verschiedenen Höhen $z$. Die zweite Zeile gibt das Verhältnis bei Berücksichtigung der Kompressibilität, die dritte Zeile ohne dies, die vierte Zeile für eine homogene Flüssigkeit.

Tabelle XI.
Verhältnis der Horizontal- zur Vertikalamplitude bei langen Wellen.

| $z$ | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 | 1500 | 2000 | 2500 | 3000 m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kompressibel | 51,9 | 25,8 | 17,0 | 12,7 | 10,1 | 6,6 | 4,9 | 3,9 | 3,2 |
| inhomogen .. | 40,3 | 20,4 | 13,8 | 10,5 | 8,5 | 5,8 | 4,5 | 3,7 | 3,2 |
| homogen.... | 39,8 | 19,9 | 13,3 | 9,9 | 8,0 | 5,3 | 4,0 | 3,2 | 2,6 |

Im inhomogenen, inkompressiblen Falle überwiegt die horizontale Amplitude die vertikale mehr als im homogenen Fall. Darin macht sich der Einfluß der stabileren Schichtung geltend. Trotzdem aber im kompressiblen Fall die Schichtung weniger stabil ist als im inkompressiblen inhomogenen, nimmt $\frac{A}{C}$ an Größe zu. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Kompressibilität der Flüssigkeit den Wellen

vor allem einen mehr longitudinalen schallwellenähnlichen Charakter verleiht $\left(\frac{A}{C}\right.$ ist umgekehrt proportional $\left. 1-\gamma v^{*2}\right)$.

Bei Wellen im tiefen Wasser haben wir, wenn wir von den Schallwellen mit $v^* = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ absehen, in (8) $v^{*2} = \frac{g}{\alpha}$ einzusetzen. Dann ergibt sich

$$\left|\frac{A}{C}\right| = \frac{L}{2\pi - \gamma g L}\left[g\left(\frac{\Gamma}{2} - \gamma\right) + N\,\mathfrak{Ctg}\,Nz\right], \tag{10}$$

wobei

$$N = \pm\frac{2\pi}{L} - g\frac{\Gamma}{2}$$

ist. Für große Werte von $z$ ergibt sich, ebenso wie im homogenen, inkompressiblen Fall $\left|\frac{A}{C}\right| = 1$. Amplitude der Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit sind dann gleich groß. Nehmen wir alle Zahlenwerte wie im vorigen Beispiel, nur $L = 100$ m, so ergibt sich für

$$\frac{A}{C} = 0{,}99\,\mathfrak{Ctg}\,0{,}0622\,z - 4{,}68 \cdot 10^{-4}.$$

Daß diese Formel für große $z$ nicht gleich 1 wird, ist eine Folge der Abrundungsfehler. Im übrigen ist schon für $z = 200$ m $\left|\frac{A}{C}\right|$ praktisch gleich 1. Je größer die Wellenlänge ist, desto weniger rasch nähert sich natürlich mit wachsender Höhe das Amplitudenverhältnis der Einheit. Es sei hier nochmals betont, daß diese letzten Überlegungen auch für lange Wellen gelten, wenn die Schichttiefe nur genügend groß ist.

Die Differentialgleichung der Stromlinien lautet

$$\frac{dx}{dz} = \frac{u}{w} = -\frac{1}{a^2 - \gamma(\beta - aU)^2} \times$$
$$\times \left\{ag\left(\frac{\Gamma}{2} - \gamma\right) + 2\Omega y\gamma(\beta - aU) + aN\,\mathfrak{Ctg}\,Nz\right\}\frac{\sin(ax - \beta t)}{\cos(ax - \beta t)},$$

also integriert

$$[\sin(ax - \beta t)]^{1-\gamma v^{*2}} e^{\left[g\left(\frac{\Gamma}{2} - \gamma\right) + 2\Omega y\gamma v^*\right]z}\,\mathfrak{Sin}\,Nz = \text{const.} \tag{11}$$

Bei Schallgeschwindigkeit, $v^{*2} = \frac{1}{\gamma}$, vereinfacht sich der von $x$ abhängige Faktor zu der Konstante 1. Die Stromlinien werden dann, wie zu erwarten war, horizontale, parallele Geraden. Das gilt natürlich für jede beliebige Form der Vertikalamplitude $C$.

Im allgemeinen Fall ist wegen $\mathfrak{Sin}\,0 = 0$ der Boden eine Stromlinie, und zwar die einzige gradlinige horizontale, wenn nicht $N$

imaginär ist. Das ganze Stromliniensystem wird mit der Geschwindigkeit $\frac{\beta}{\alpha}$ fortgetragen.

Die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen kann man in bekannter Weise aus den Geschwindigkeitskomponenten berechnen.

## § 17. Zwei unendlich tiefe Schichten zwischen starren Grenzen.

Wir betrachten nunmehr ein System von zwei Schichten, die wir von vornherein, um die Rechnung zu vereinfachen, unendlich tief annehmen wollen. Die gemeinsame Grenzfläche beider Schichten habe im ungestörten Zustand die Gleichung $z = 0$, die untere Schicht sei durch I, die obere durch II bezeichnet. Es war

$$C(z) = K_1 e^{\left(\frac{g\Gamma}{2} + N\right)z} + K_2 e^{\left(\frac{g\Gamma}{2} - N\right)z}.$$

Damit die Vertikalamplituden, und damit die übrigen Störungsgrößen, in der Schicht I nicht für unendlich große negative $z$ unendlich groß werden, muß $K_2^{\mathrm{I}} = 0$ sein, also

$$C^{\mathrm{I}}(z) = K^{\mathrm{I}} e^{\left(\frac{g\Gamma^{\mathrm{I}}}{2} + N^{\mathrm{I}}\right)z}. \tag{1}$$

Entsprechend muß für die Schicht II gelten

$$C^{\mathrm{II}}(z) = K^{\mathrm{II}} e^{\left(\frac{g\Gamma^{\mathrm{II}}}{2} - N^{\mathrm{II}}\right)z}. \tag{1a}$$

Daraus ergibt sich für die Amplituden der Störungsdrucke

$$\left\{\begin{aligned} D^{\mathrm{I}} &= i\frac{Q^{\mathrm{I}}}{a^2 - \gamma^{\mathrm{I}}(\beta - aU^{\mathrm{I}})^2} \times \\ &\times \left\{\left[2\Omega_y a - \gamma^{\mathrm{I}} g(\beta - aU^{\mathrm{I}})\right] + (\beta - aU^{\mathrm{I}})\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{I}} g}{2} + N^{\mathrm{I}}\right)\right\} K^{\mathrm{I}} e^{\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{I}} g}{2} + N^{\mathrm{I}}\right)z} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} D^{\mathrm{II}} &= i\frac{Q^{\mathrm{II}}}{a^2 - \gamma^{\mathrm{II}}(\beta - aU^{\mathrm{II}})^2} \times \\ &\times \left\{\left[2\Omega a - \gamma^{\mathrm{II}} g(\beta - aU^{\mathrm{II}})\right] + (\beta - aU^{\mathrm{II}})\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{II}} g}{2} - N^{\mathrm{II}}\right)\right\} K^{\mathrm{II}} e^{\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{II}} g}{2} - N^{\mathrm{II}}\right)z}. \end{aligned}\right. \tag{2a}$$

Da $P^{\mathrm{I}} = P_0^{\mathrm{I}} e^{-g\Gamma^{\mathrm{I}} z}$ und $P^{\mathrm{II}} = P_0^{\mathrm{II}} e^{-g\Gamma^{\mathrm{II}} z}$, ergibt sich für die ungestörten Drucke in genügend kleiner Umgebung von $z = 0$

$$P^{\mathrm{I}} = P_0^{\mathrm{I}} \left(1 - g\Gamma^{\mathrm{I}} z\right) \tag{3}$$

und

$$P^{\mathrm{II}} = P_0^{\mathrm{II}} \left(1 - g\Gamma^{\mathrm{II}} z\right). \tag{3a}$$

Die Gleichung der gestörten Grenzfläche lautet dann nach (2, 8)

$$z - Z e^{i(\alpha x - \beta t)} = 0 \tag{4}$$

mit

$$Z = i \frac{\frac{Q_0^{\mathrm{I}} K^{\mathrm{I}}}{\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{I}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})^2}\left\{[2\,\Omega_y \alpha - g\gamma^{\mathrm{I}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})] + (\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{I}} g}{2} + N^{\mathrm{I}}\right)\right\}}{g(Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}})} - \frac{\frac{Q_0^{\mathrm{II}} K^{\mathrm{II}}}{\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{II}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})^2}\left\{[2\,\Omega_y \alpha - \gamma^{\mathrm{II}} g(\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})] + (\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})\left(\frac{g\Gamma^{\mathrm{II}}}{2} - N^{\mathrm{II}}\right)\right\}}{g(Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}})}. \tag{5}$$

Mittels der Grenzflächenbedingung (2, 7) ergeben sich die Relationen

$$\left.\begin{aligned} K^{\mathrm{I}} &= -i(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})\,Z \\ K^{\mathrm{II}} &= -i(\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})\,Z \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(6) in (5) eingesetzt gibt als Frequenzgleichung

$$\left.\begin{aligned} g(Q_0^{\mathrm{I}} - Q_0^{\mathrm{II}}) = {} & \frac{Q_0^{\mathrm{I}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})}{\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{I}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})^2}\left\{[2\,\Omega_y \alpha - \gamma^{\mathrm{I}} g(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})] + (\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{I}} g}{2} + N^{\mathrm{I}}\right)\right\} - \\ & - \frac{Q_0^{\mathrm{II}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})}{\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{II}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})^2}\left\{[2\,\Omega_y \alpha - \gamma^{\mathrm{II}} g(\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})] + (\beta - \alpha U^{\mathrm{II}})\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{II}} g}{2} - N^{\mathrm{II}}\right)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

worin war

$$N^2 = \frac{g^2 \Gamma^2}{4} + \alpha^2 - \gamma(\beta - \alpha U)^2 + 4\,\Omega_y^2 \gamma - \alpha g^2\, 2\,\Omega_y \frac{2\gamma - \Gamma}{\beta - \alpha U} - g^2 \alpha^2 \frac{\Gamma - \gamma}{(\beta - \alpha U)^2}.$$

Wir wollen diese recht komplizierte Gleichung nicht in dieser Form behandeln, sondern von der Erdrotation und dem Windsprung an der Schichtgrenze absehen. Dann können wir $U = 0$ setzen. Auch an dem so vereinfachten Problem läßt sich alles wesentliche erkennen. Die Gleichung (7) reduziert sich dann auf die einfachere

$$Q_0^{\mathrm{I}} \frac{\beta^2\left(\frac{g\Gamma^{\mathrm{I}}}{2} + N^{\mathrm{I}}\right) - \alpha^2 g}{\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{I}}\beta^2} = Q_0^{\mathrm{II}} \frac{\beta^2\left(\frac{g\Gamma^{\mathrm{II}}}{2} - N^{\mathrm{II}}\right) - \alpha^2 g}{\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{II}}\beta^2}.\,^{1)} \tag{8}$$

Man kann zunächst durch Probieren die naheliegenden Vermutungen bestätigen, daß

$$\beta^2 = \alpha g, \qquad \beta^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^{\mathrm{I}}}, \qquad \beta^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^{\mathrm{II}}}$$

---

[1]) Da die gleiche Frequenzengleichung auch im Fall unendlich tiefer Schichten mit freier Oberfläche gilt, wie in § 19 gezeigt werden wird, gelten die folgenden Betrachtungen dieses und des nächsten Paragraphen auch für diesen der Erdatmosphäre besser darstellenden Fall.

Lösungen sind. Gerade diese Wellen, die uns schon wiederholt begegnet sind (Stokes'sche und Schallwellen), interessieren uns aber hier nicht. Um direkt nach $\beta$ zu ordnen, ist ein großer Aufwand an Rechenarbeit notwendig, da $\beta$ auch unter den Wurzelausdrücken $N^{I}$ und $N^{II}$ vorkommt. Wir wollen deshalb (8) im Anschluß an Lamb 1912 etwas anders behandeln und verfahren, dabei ähnlich wie in § 6. Wir setzen

$$\frac{g\Gamma^{I}}{2}+N^{I}=\lambda^{I} \qquad \text{und} \qquad \frac{g\Gamma^{II}}{2}-N^{II}=\lambda^{II},$$

wo also $\lambda$ die Lösungen von

$$\lambda^2-g\Gamma\lambda-a^2+\gamma\beta^2+g^2\frac{\Gamma-\gamma}{\beta^2}a^2=0 \tag{9}$$

sind [(9) ist die zur Differentialgleichung für $C(z)$ gehörige charakteristische Gleichung]. Die Frequenzengleichung lautet wegen

$$Q_0^{I}=\frac{P_0}{RT^{I}}=P_0\Gamma^{I}=P_0\gamma^{I}k \qquad \text{und} \qquad Q_0^{II}=\frac{P_0}{RT^{II}}=P_0\Gamma^{II}=P_0\gamma^{II}k$$

$$\gamma^{I}\frac{\beta^2\lambda^{I}-a^2g}{a^2-\gamma^{I}\beta^2}=\gamma^{II}\frac{\beta^2\lambda^{II}-a^2g}{a^2-\gamma^{II}\beta^2}=\mu. \tag{8a}$$

Für $\lambda^{I}$ und $\lambda^{II}$ ergibt sich daraus

$$\lambda^{I}=\mu\left(\frac{a^2}{\gamma^{I}\beta^2}-1\right)+\frac{a^2}{\beta^2}g \qquad \text{und} \qquad \lambda^{II}=\mu\left(\frac{a^2}{\gamma^{II}\beta^2}-1\right)+\frac{a^2}{\beta^2}g.$$

Setzt man diese beiden Werte in (9) ein, so erhält man zwei Gleichungen für $\mu$, die formal gleich sind bis auf die Indizes I und II. Bedeutet

$$L^{I}=g\frac{2a^2\gamma^{I}-\gamma^{I2}\beta^2k}{a^2-\gamma^{I}\beta^2}$$

und

$$M^{I}=(g^2a^2-\beta^4)\frac{\gamma^{I2}}{a^2-\gamma^{I}\beta^2}$$

und zwei entsprechende Ausdrücke für $L^{II}$ und $M^{II}$, so ist

$$\left.\begin{aligned}\mu^2+L^{I}\mu+M^{I}&=0\\ \mu^2+L^{II}\mu+M^{II}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Demnach wird

$$\mu=-\frac{M^{I}-M^{II}}{L^{I}-L^{II}}$$

und

$$(M^{I}-M^{II})^2+(L^{I}-L^{II})(L^{I}M^{II}-L^{II}M^{I})=0. \tag{11}$$

Da

$$M^{\mathrm{I}}-M^{\mathrm{II}}=\frac{(g^2\alpha^2-\beta^4)(\gamma^{\mathrm{I}}-\gamma^{\mathrm{II}})}{(\alpha^2-\gamma^{\mathrm{I}}\beta^2)(\alpha^2-\gamma^{\mathrm{II}}\beta^2)}\{\alpha^2(\gamma^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{II}})-\beta^2\gamma^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{II}}\}$$

$$L^{\mathrm{I}}-L^{\mathrm{II}}=\frac{g(\gamma^{\mathrm{I}}-\gamma^{\mathrm{II}})}{(\alpha^2-\gamma^{\mathrm{I}}\beta^2)(\alpha^2-\gamma^{\mathrm{II}}\beta^2)}\{2\alpha^4-\alpha^2\beta^2k(\gamma^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{II}})+\beta^4k\gamma^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{II}}\}$$

$$L^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{II}}-L^{\mathrm{II}}M^{\mathrm{I}}=-\frac{2\alpha^2g(g^2\alpha^2-\beta^4)\gamma^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{II}}(\gamma^{\mathrm{I}}-\gamma^{\mathrm{II}})}{(\alpha^2-\gamma^{\mathrm{I}}\beta^2)(\alpha^2-\gamma^{\mathrm{II}}\beta^2)},$$

ergibt sich aus (11) die Frequenzgleichung

$$\left.\begin{array}{l}(g^2\alpha^2-\beta^4)[\alpha^2(\gamma^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{II}})-\beta^2\gamma^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{II}}]^2-\\ \quad -2g^2\gamma^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{II}}\alpha^2[2\alpha^4-\alpha^2\beta^2k(\gamma^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{II}})+\beta^4k\gamma^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{II}}]=0.\end{array}\right\}\quad(12)$$

Hierin sind die Faktoren, welche die Stokes'schen Oberflächenwellen und die Schallwellen liefern, bereits fortgelassen. Führen wir in (12) die für die beiden Schichten charakteristischen Schallgeschwindigkeiten ein

$$c^{\mathrm{I}2}=\frac{1}{\gamma^{\mathrm{I}}};\qquad c^{\mathrm{II}2}=\frac{1}{\gamma^{\mathrm{II}}},$$

so verwandelt sich (12) in

$$\left.\begin{array}{l}(\beta^4-\alpha^2g^2)[\alpha^2(c^{\mathrm{I}2}+c^{\mathrm{II}2})-\beta^2]^2+\\ \quad +2g^2\alpha^2[2\alpha^4c^{\mathrm{I}2}c^{\mathrm{II}2}-\alpha^2\beta^2k(c^{\mathrm{I}2}+c^{\mathrm{II}2})+\beta^4k]=0.\end{array}\right\}\quad(12\,\mathrm{a})$$

Wir setzen hierin zur Abkürzung wie Lamb 1912

$$c^{\mathrm{I}2}+c^{\mathrm{II}2}=2p^2,\qquad c^{\mathrm{II}2}-c^{\mathrm{I}2}=2r^2,$$

wodurch

$$c^{\mathrm{I}2}c^{\mathrm{II}2}=p^4-r^4$$

wird. Weiter setzen wir

$$x=\frac{\beta^2}{\alpha^2p^2}=\frac{v^{*2}}{p^2},\qquad \omega=\frac{g}{p^2\alpha}.\quad(13)$$

Damit ist also

$$\tau=\frac{L}{p\sqrt{x}}=2\pi\frac{\omega p}{g\sqrt{x}}\quad\text{und}\quad L=2\pi\frac{\omega}{g}p^2.$$

Gleichung (12a) lautet mit diesen Abkürzungen

$$x^2(x-2)^2+\omega^2\left[(2k-1)x^2-4(k-1)x-4\frac{r^4}{p^4}\right]=0.\quad(14)$$

Hierin ist übrigens

$$\frac{r^2}{p^2}=\frac{c^{\mathrm{I}2}-c^{\mathrm{II}2}}{c^{\mathrm{I}2}+c^{\mathrm{II}2}}=\frac{T^{\mathrm{II}}-T^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{II}}+T^{\mathrm{I}}}.$$

Für sehr kleine $x$ und $\omega$, d. h. für sehr kleine Wellenlängen wird (13) einfach

$$4x^2-4\frac{r^4}{p^4}\omega^2=0.$$

Also ergibt sich

$$(15) \qquad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{g}{\alpha}\,\frac{T^{II}-T^{I}}{T^{II}+T^{I}}.$$

Diese Formel hat bereits **Stokes** für den Fall inkompressibler Flüssigkeitsschichten mit konstanter Dichte erhalten [statt der Temperatur ist dann natürlich die Dichte in Formel (15) einzusetzen]. Daß im Falle sehr kleiner Dimensionen der Störungen die **Stokes**'sche Formel (15) eine gute Approximation an den inkompressiblen Fall darstellt, war von vornherein zu erwarten. Wenn wir im folgenden die sich aus der **Stokes**'schen Formel ergebenden Werte für $\beta$ usw. mit denen für den kompressiblen Fall vergleichen wollen, werden wir die ersteren durch einen Querstrich kennzeichnen.

Nach der Definitionsgleichung für $x$ und $\omega$ war

$$\beta^2 = \alpha^2 p^2 x = \alpha x \frac{g}{\omega}.$$

Also ergibt sich für das Verhältnis der Orbitalfrequenzen im kompressiblen und inkompressiblen homogenen Fall

$$(16) \qquad \frac{\bar{\beta}}{\beta} = \sqrt{\frac{T^{II}-T^{I}}{T^{II}+T^{I}}}\sqrt{\frac{x}{\omega}}.$$

Das Verhältnis für die Wellengeschwindigkeiten ist natürlich dasselbe wie in (16).

Für $\mu$ hatten wir die Formel gefunden

$$\mu = -\frac{M^{I}-M^{II}}{L^{I}-L^{II}}.$$

Dafür läßt sich unter Benutzung der Frequenzengleichung (11) schreiben

$$\mu = \frac{L^{I}M^{II}-L^{II}M^{I}}{M^{I}-M^{II}} = \frac{2g\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2(c^{I2}+c^{II2})}.$$

Also ergibt sich für

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda^{I}}{\alpha} = \dfrac{\alpha g}{\beta^2}\,\dfrac{\alpha^2(c^{I2}-c^{II2})-\beta^2}{\beta^2-\alpha^2(c^{I2}+c^{II2})} = \dfrac{\omega}{x}\,\dfrac{2\dfrac{r^2}{p^2}+x}{2-x} \\[2ex] \dfrac{\alpha^{II}}{\lambda} = \dfrac{\alpha g}{\beta^2}\,\dfrac{\alpha^2(c^{II2}-c^{I2})-\beta^2}{\beta^2-\alpha^2(c^{I2}+c^{II2})} = -\dfrac{\omega}{x}\,\dfrac{2\dfrac{r^2}{p^2}-x}{2-x}. \end{cases}$$

$\lambda^{I}$ und $\lambda^{II}$ sind die Koeffizienten von $z$ in der Exponentialfunktion, die sich im inkompressiblen Fall auf $\alpha$ reduzieren. Die durch (17) angegebenen Verhältnisse lassen also erkennen, um wieviel mehr oder weniger stark die Störung mit Entfernung von der Grenzfläche in dem einen Falle abklingt als im anderen.

Aus (14) folgt

$$(18) \qquad \omega^2 = \frac{x^2(2-x)^2}{4\dfrac{r^4}{p^4}+4(k-1)x-(2k-1)x^2}.$$

Da sich die Diskussion von (12) sehr schwierig gestalten würde — es handelt sich um eine Gleichung 4. Grades in $\beta^2$ —, wollen wir wie Lamb, nur viel ausführlicher, statt dessen mittels (18) ein Zahlenbeispiel durchrechnen, indem wir die Werte von $\omega$ aus willkürlich angenommenen Werten von $x$ berechnen und nachträglich die dazugehörigen Zahlenwerte von $\alpha$, $\beta$ usw. ermitteln, welche Größen uns eigentlich interessieren.

Wir setzen
$$\frac{r^2}{p^2} = \frac{1}{100} = \frac{T^{II} - T^{I}}{T^{II} + T^{I}}.$$

Bei einer mittleren Temperatur von 273° müßte dann an der Grenzfläche ein Temperatursprung von ca. 5,4° herrschen. Dann ist $p = \sqrt{kR \cdot 273} = 332$ m, $k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4$, und zur numerischen Berechnung von $\omega^2$ ergibt sich aus (18)
$$\omega^2 = \frac{x^2(2-x)^2}{0{,}0004 + 1{,}6x - 1{,}8x^2}.$$

Tabelle XII.

Wellen an der Grenzfläche zweier isotherm geschichteter unendlich tiefer Luftschichten, deren Zustandsänderungen adiabatisch verlaufen.

$$\frac{T^{II} - T^{I}}{T^{II} + T^{I}} = \frac{1}{100}$$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\omega$ | $\frac{\beta}{\beta} = \sqrt{\frac{\Delta T}{2T}}\sqrt{\frac{x}{\omega}}$ | $\frac{\lambda^{I}}{\alpha}$ | $-\frac{\lambda^{II}}{\alpha}$ | $L$ | $T$ | $v^*$ |
| $10^{-6}$ | $10^{-4}$ | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 7,0 m | 21,2 sec | 0,33 m/sec |
| $5 \cdot 10^{-6}$ | $4{,}940 \cdot 10^{-4}$ | 1,005 | 0,988 | 0,988 | 34,8 „ | 46,8 „ | 0,74 „ |
| $10^{-5}$ | $0{,}981 \cdot 10^{-3}$ | 1,010 | 0,981 | 0,980 | 69,2 „ | 65,9 „ | 1,05 „ |
| $3 \cdot 10^{-5}$ | $2{,}840 \cdot 10^{-3}$ | 1,030 | 0,947 | 0,945 | 200 „ | 110,0 „ | 1,82 „ |
| $7 \cdot 10^{-5}$ | $6{,}200 \cdot 10^{-3}$ | 1,065 | 0,890 | 0,882 | 436 „ | 156,8 „ | 2,78 „ |
| $10^{-4}$ | $0{,}845 \cdot 10^{-2}$ | 1,088 | 0,850 | 0,841 | 597 „ | 180 „ | 3,31 „ |
| $2 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}490 \cdot 10^{-2}$ | 1,158 | 0,753 | 0,737 | 1048 „ | 222 „ | 4,72 „ |
| $4 \cdot 10^{-4}$ | $2{,}480 \cdot 10^{-2}$ | 1,270 | 0,633 | 0,608 | 1745 „ | 262 „ | 6,66 „ |
| $6 \cdot 10^{-4}$ | $3{,}250 \cdot 10^{-2}$ | 1,360 | 0,558 | 0,526 | 2288 „ | 282 „ | 8,12 „ |
| $8 \cdot 10^{-4}$ | $3{,}890 \cdot 10^{-2}$ | 1,433 | 0,505 | 0,462 | 2740 „ | 291 „ | 9,42 „ |
| $10^{-3}$ | $0{,}448 \cdot 10^{-1}$ | 1,495 | 0,470 | 0,425 | 3160 „ | 301 „ | 10,50 „ |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | $0{,}666 \cdot 10^{-1}$ | 1,735 | 0,367 | 0,300 | 4650 „ | 313 „ | 14,80 „ |
| $4 \cdot 10^{-3}$ | $0{,}970 \cdot 10^{-1}$ | 2,030 | 0,292 | 0,194 | 6810 „ | 324 „ | 21,00 „ |
| $6 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}200 \cdot 10^{-1}$ | 2,240 | 0,264 | 0,142 | 8450 „ | 328 „ | 25,70 „ |
| $8 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}400 \cdot 10^{-1}$ | 2,390 | 0,245 | 0,105 | 9840 „ | 330 „ | 29,60 „ |
| $10^{-2}$ | $1{,}570 \cdot 10^{-1}$ | 2,520 | 0,237 | 0,079 | 11020 „ | 332 „ | 33,20 „ |

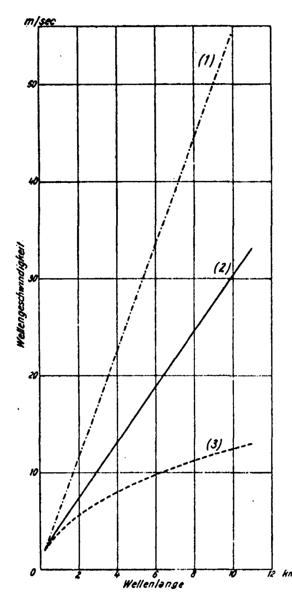



Fig. 4. Wellengeschwindigkeit an einer Grenzfläche mit ca. 5,4° Temperatursprung; (1) bei isothermer Schichtung, ohne Zustandsänderung, (2) bei isothermer Schichtung und adiabatischer Zustandsänderung, (3) bei konstanter Dichte in jeder Schicht.

Die Ergebnisse dieser numerischen Berechnung sind in Tabelle XII und, soweit sie die Wellengeschwindigkeit betreffen, in Figur 4 eingetragen; in der Figur sind zum Vergleich noch die Wellengeschwindigkeiten für den inkompressiblen, inhomogenen und homogenen Fall angegeben (vgl. Tabelle II, Seite 36). Die Unterschiede zwischen den Wellengeschwindigkeiten sind in den drei verschiedenen Fällen für größere Wellenlängen recht beträchtlich und verstärken sich, je größer die Wellenlänge wird. Im Falle isothermer Schichtung und adiabatischer Änderungen liegen die Wellengeschwindigkeiten in der Mitte zwischen den für die beiden anderen Annahmen gefundenen Werte. Das ist auch verständlich; denn der Fall inkompressibler Flüssigkeiten, deren Dichte mit der Höhe abnimmt, stellt eine stabilere Schichtung dar, als der Fall kompressibler, inhomogener Flüssigkeit, und diese Schichtung ist wieder stabiler, als Übereinanderlagerung zweier in sich homogener, inkompressibler Flüssigkeiten. Ein Vergleich von Spalte 4 und 5 der berechneten Tabelle zeigt, daß die Störung insbesondere bei großen Wellenlängen nach oben weniger schnell abnimmt als nach unten. Die Gegenüberstellung mit Spalte 3 von Tabelle II zeigt, daß diese Abnahme aber bei gleichen Wellenlängen im inkompressiblen, stabileren Fall langsamer vor sich geht als im kompressiblen, und in beiden Fällen wieder langsamer als im Falle inkompressibler, homogener Flüssigkeitsschichten. Die Erklärung für dieses zunächst scheinbar widerspruchsvolle Resultat wurde schon auf Seite 35 gegeben: Zu einer bestimmten Störung (d. h. zu einer Störung mit bestimmten Energievorrat) gehört in dem Fall stabilerer Schichtung eine kleinere Wellenlänge. Geht man aber umgekehrt, wie wir es bei den vorliegenden Rechnungen taten, von der Wellenlänge als dem

ursprünglich gegebenen aus, so muß natürlich zu gleichen Wellenlängen in Fällen stabilerer Schichtung die größere, d. h. weiter reichende Störung gehören.

Der Versuch, das vorstehend behandelte Problem durch Mitberücksichtigung der Erdrotation und vor allem der Winddiskontinuität an der Grenzfläche zu erweitern, führt auf außerordentlich lange Formeln, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden soll.

## § 18. Weitere Bemerkungen zur Theorie der stationären Wellen (Luftwogen).

Die Annahme verschiedener Windgeschwindigkeiten in beiden Schichten ist notwendig, wenn man die stationären Wellen untersuchen will. Wir gehen deshalb auf die Frequenzengleichung (17, 7) zurück, in der wir nunmehr nur die Erdrotation vernachlässigen. Ferner ist in der Theorie der stationären Wellen von vornherein $\beta = 0$ zu setzen. Wir führen, wie in der Rechnung des vorigen Paragraphen

$$\lambda^{I} = \frac{g\Gamma^{I}}{2} + N^{I} \qquad \text{und} \qquad \lambda^{II} = \frac{g\Gamma^{II}}{2} - N^{II}$$

ein, worin jetzt freilich

$$N^2 = \frac{g^2\Gamma^2}{4} + \alpha^2 - \gamma\alpha^2 U^2 - g^2\frac{\Gamma-\gamma}{U^2}$$

ist; oder anders ausgedrückt, die beiden Werte für $\lambda$ sind Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 - g\Gamma\lambda + \frac{\gamma g^2}{U^2}\left(\frac{\Gamma}{\gamma} - 1\right) - \alpha^2(1-\gamma U^2) = 0, \tag{1}$$

die in entsprechender Weise wie (17, 9) aus der charakteristischen Gleichung von (15, 5) folgt. Die Frequenzengleichung wird somit

$$Q_0^{I}\frac{\lambda^{I}U^{I2}-g}{1-\gamma^{I}U^{I2}} = Q_0^{II}\frac{\lambda^{II}U^{II2}-g}{1-\gamma^{II}U^{II2}} = \mu. \tag{2}$$

Die weitere Rechnung verläuft wieder wie im vorigen Paragraphen. Es ist

$$\lambda^{I} = \mu\frac{1-\gamma^{I}U^{I2}}{Q_0^{I}U^{I2}} + \frac{g}{U^{I2}},$$

$$\lambda^{II} = \mu\frac{1-\gamma^{II}U^{II2}}{Q_0^{II}U^{II2}} + \frac{g}{U^{II2}}.$$

In (1) eingesetzt ergeben sich als die beiden Gleichungen für $\mu$

$$\left.\begin{aligned} \mu^2 + L^{I}\mu + M^{I} &= 0 \\ \mu^2 + L^{II}\mu + M^{II} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei

$$L^{\mathrm{I}} = g\,\frac{2-\Gamma^{\mathrm{I}}\,U^{\mathrm{I}2}}{1-\gamma^{\mathrm{I}}\,U^{\mathrm{I}2}}\,Q_0^{\mathrm{I}}$$

und

$$M^{\mathrm{I}} = \frac{g^2-a^2\,U^{\mathrm{I}4}}{1-\gamma^{\mathrm{I}}\,U^{\mathrm{I}2}}\,Q_0^{\mathrm{I}2},$$

sowie entsprechende Ausdrücke für $L^{\mathrm{II}}$ und $M^{\mathrm{II}}$ gesetzt sind. Wie früher nehmen wir an, daß $U^{\mathrm{I}} = -U^{\mathrm{II}} = U$ ist, d. h. daß die Windgeschwindigkeiten in beiden Schichten gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung haben. Diese Annahme erweist sich bekanntlich auch für die praktische Berechnung der Wellen häufig als zweckmäßig[1]), da man im allgemeinen zwar den Windsprung aus den Beobachtungen kennt, aber nicht den Anteil jeder Schicht an seinem Zustandekommen. Führen wir die Rechnung weiter wie in § 17 durch, so erhalten wir folgende Relation für $a$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(g^2-a^2U^4)\Big\{(g^2-a^2U^4)\big[Q_0^{\mathrm{I}2}(1-\gamma^{\mathrm{II}}U^2)-Q_0^{\mathrm{II}2}(1-\gamma^{\mathrm{I}}U^2)\big]^2+\\ &+g^2\big[2\big(Q_0^{\mathrm{I}}(1-\gamma^{\mathrm{II}}U^2)-Q_0^{\mathrm{II}}(1-\gamma^{\mathrm{I}}U^2)\big)-U^2\big(Q_0^{\mathrm{I}}\Gamma^{\mathrm{I}}(1-\gamma^{\mathrm{II}}U^2)-\\ &-Q_0^{\mathrm{II}}\Gamma^{\mathrm{II}}(1-\gamma^{\mathrm{I}}U^2)\big)\big]\,Q_0^{\mathrm{I}}Q_0^{\mathrm{II}}\big[2(Q_0^{\mathrm{II}}-Q_0^{\mathrm{I}})-U^2(\Gamma^{\mathrm{I}}Q_0^{\mathrm{II}}-\Gamma^{\mathrm{II}}Q_0^{\mathrm{I}})\big]\Big\}=0.\end{aligned}\right.$$

Wie aus der ersten Klammer hervorgeht, sind zunächst Wellen möglich, wie sie an der Oberfläche einer unendlich tiefen homogenen inkompressiblen Flüssigkeit vorkommen [vgl. (5, 12)]. Diese interessieren uns hier nicht weiter.

Es ist $P_0$ der Druck an der Grenzfläche. Dann gilt

$$(5)\quad P_0 = Q_0^{\mathrm{I}}RT^{\mathrm{I}} = Q_0^{\mathrm{II}}RT^{\mathrm{II}};\quad \Gamma^{\mathrm{I,II}} = \frac{1}{RT^{\mathrm{I,II}}} = \frac{Q_0^{\mathrm{I,II}}}{P_0};\quad \gamma^{\mathrm{I,II}} = \frac{\Gamma^{\mathrm{I,II}}}{k},$$

und damit ergibt sich aus (4)

$$(6)\quad L = \frac{2\pi}{g}U^2\,\frac{1-\dfrac{1}{kR}\,\dfrac{U^2}{T^{\mathrm{I}}+T^{\mathrm{II}}}}{\sqrt{\dfrac{1-2k}{k^2R^2}\,\dfrac{U^4}{(T^{\mathrm{I}}+T^{\mathrm{II}})^2}+\dfrac{2(k-1)}{kR}\,\dfrac{U^2}{T^{\mathrm{I}}+T^{\mathrm{II}}}+\left(\dfrac{T^{\mathrm{II}}-T^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{II}}+T^{\mathrm{I}}}\right)^2}},$$

wofür man mit meist ausreichender Genauigkeit setzen kann

$$(6a)\quad L = \frac{2\pi}{g}U^2\,\frac{T^{\mathrm{I}}+T^{\mathrm{II}}}{\sqrt{(T^{\mathrm{II}}-T^{\mathrm{I}})^2+\dfrac{2(k-1)}{kR}\,U^2(T^{\mathrm{I}}+T^{\mathrm{II}})}}.$$

---

[1]) In anderen Fällen wird gerade der Extremfall auftreten, daß die eine, etwa die untere kalte Schicht ruht und die obere wärmere darüber hinwegstreicht. Dann müßte man in (3) $U^{\mathrm{I}} = 0$ setzen und mit den so entstehenden Ausdrücken weiterrechnen. Emden 1897 hat einen derartigen Fall von Wogenbildung an der Oberfläche eines ruhenden Kaltluftsees anläßlich einer Ballonfahrt beobachtet.

Setzt man in (4) $\gamma^{I} = \gamma^{II} = 0$, so erhält man die Wellenlänge für den inkompressiblen inhomogenen Fall aus

$$L = \frac{2\pi}{g} U^2 \frac{T^{I} + T^{II}}{\sqrt{(T^{II} - T^{I})^2 + \frac{2U^2}{R}(T^{I} + T^{II})}}. \tag{7}$$

Diese Formel stimmt abgesehen von einigen belanglosen Vereinfachungen mit (7, 4) überein.

Setzen wir in (4) $\gamma^{I} = \gamma^{II} = \Gamma^{I} = \Gamma^{II} = 0$, so erhalten wir den Fall inkompressibler homogener Schichten. Das gibt die wohlbekannte Formel

$$L = \frac{2\pi}{g} U^2 \frac{T^{II} + T^{I}}{T^{II} - T^{I}}. \tag{8}$$

Um die Unterschiede zu übersehen, die sich in den drei verschiedenen Fällen ergeben, ist die umstehende Tabelle XIII für verschiedene Windsprünge ($= 2U$) und Dichtesprünge berechnet worden. Dabei ist gesetzt

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4;\ R = 287 \frac{m^2}{\sec^2 \text{grad}};\ g = 9{,}81\ \text{m/sec}^2;\ T^{I} + T^{II} = 2 \cdot 270^{0}.$$

Dann ergeben sich aus (5a), (7) und (8) folgende numerische Formeln zur Berechnung der Tabelle (alle Größen in MTS-Einheiten).

$$L = 640{,}5\, U^2 \frac{1}{\sqrt{3{,}69\, U^2 + 3{,}43\, (\Delta T)^2}} \quad \text{(kompressibel, isotherm)}, \tag{6b}$$

$$L = 640{,}5\, U^2 \frac{1}{\sqrt{12{,}9\, U^2 + 3{,}43\, (\Delta T)^2}} \quad \text{(inkompressibel, isotherm)}, \tag{7a}$$

$$L = 345{,}9 \frac{U^2}{\Delta T} \quad \text{(inkompressibel, homogen)}. \tag{8a}$$

Wir sehen aus Tabelle XIII und aus der danach gezeichneten Figur 5 (für einen bestimmten Temperatursprung), daß die Wellenlängen bei gleichen Temperatur- und Windsprüngen am größten sind in inkompressiblen Flüssigkeitsschichten mit konstanter Dichte, also in dem Fall, der von allen drei betrachteten die kleinste Stabilität hat. Im Falle eines isotherm geschichteten Gases, dessen Zustandsänderungen adiabatisch verlaufen, sind die Wellenlängen wesentlich geringer, und in dem Falle inkompressibler Flüssigkeit und isothermer Schichtung ist die Wellenlänge am kleinsten, was zu erwarten war, da unter diesen Annahmen die Schichtung am stabilsten ist.

In § 7 wurde darauf hingewiesen, daß A. Wegeners Erklärung der zu großen berechneten Wellenlängen der Helmholtzschen Luftwogen zweifelhaft erscheint, und daß der Unterschied zwischen Beobachtung und Theorie wohl eher in der Nichtberücksichtigung der Kompressibilität der Luft gesucht werden muß. Berücksichtigt

## Tabelle XIII.

### Länge stationärer Wellen an einer Grenzfläche für verschiedene Wind- ($2U$) und Temperatursprünge ($\Delta T$).

Mitteltemperatur = $270^0$.

1. Inkompressibel. Isotherme Schichtung.

| $\Delta T$ \ $U$ | 1 m/sec | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 m/sec |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^0$ | 124,2 m | 316 m | 506 m | 691 m | 874 m | 1054 m | 1232 m | 1412 m | 1596 m | 1776 m |
| $4^0$ | 77,8 „ | 248 „ | 441 „ | 635 „ | 824 „ | 1014 „ | 1194 „ | 1380 „ | 1568 „ | 1748 „ |
| $6^0$ | 54,9 „ | 194 „ | 373 „ | 565 „ | 758 „ | 950 „ | 1140 „ | 1330 „ | 1520 „ | 1704 „ |
| $8^0$ | 42,0 „ | 156 „ | 314 „ | 496 „ | 687 „ | 884 „ | 1074 „ | 1268 „ | 1460 „ | 1650 „ |
| $10^0$ | 34,0 „ | 129 „ | 269 „ | 437 „ | 620 „ | 812 „ | 1002 „ | 1198 „ | 1392 „ | 1588 „ |

2. Adiabatische Änderungen, isotherme Schichtung.

| $\Delta T$ \ $U$ | 1 m/sec | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 m/sec |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^0$ | 154 m | 479 m | 842 m | 1202 m | 1550 m | 1905 m | 2250 m | 2590 m | 2940 m | 3280 m |
| $4^0$ | 84 „ | 306 „ | 614 „ | 961 „ | 1320 „ | 1680 „ | 2050 „ | 2400 „ | 2760 „ | 3120 „ |
| $6^0$ | 57 „ | 218 „ | 460 „ | 759 „ | 1090 „ | 1440 „ | 1800 „ | 2160 „ | 2530 „ | 2890 „ |
| $8^0$ | 43 „ | 167 „ | 362 „ | 615 „ | 907 „ | 1230 „ | 1570 „ | 1920 „ | 2280 „ | 2640 „ |
| $10^0$ | 34 „ | 135 „ | 297 „ | 512 „ | 767 „ | 1060 „ | 1370 „ | 1700 „ | 2050 „ | 2400 „ |

3. Inkompressibel. In jeder Schicht konstante Schichtung.

| $\Delta T$ \ $U$ | 1 m/sec | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 m/sec |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^0$ | 173 m | 692 m | 1558 m | 2770 m | 4325 m | 6230 m | 8480 m | 11080 m | 14010 m | 17295 m |
| $4^0$ | 86 „ | 346 „ | 778 „ | 1384 „ | 2160 „ | 3115 „ | 4240 „ | 5540 „ | 7020 „ | 8650 „ |
| $6^0$ | 58 „ | 231 „ | 518 „ | 924 „ | 1440 „ | 2070 „ | 2820 „ | 3684 „ | 4660 „ | 5765 „ |
| $8^0$ | 43 „ | 173 „ | 390 „ | 694 „ | 1083 „ | 1560 „ | 2124 „ | 2770 „ | 3510 „ | 4325 „ |
| $10^0$ | 35 „ | 138 „ | 311 „ | 554 „ | 865 „ | 1245 „ | 1696 „ | 2214 „ | 2804 „ | 3459 „ |

man nur die nach oben abnehmende Dichte, so ergeben sich, wie im § 7 gezeigt, viel zu kleine Werte. Da die Werte für die Wellenlängen, die sich bei gleichzeitiger Berücksichtigung der adiabatischen Zustandsänderungen ergeben, in der Mitte zwischen den beiden extremen Fällen liegen, soll geprüft werden, ob sich tatsächlich bei Annahme isothermer Schichtung und adiabatischer Zustandsänderungen eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit ergibt. In der folgenden Tabelle sind nach A. Wegener 1906 für drei Fälle die beobachteten Werte für Temperatur- und Windsprung, Mitteltemperatur, sowie die Wellenlänge, wie sie beobachtet wurde, an-

gegeben, ferner die für den homogenen inkompressiblen, für den inhomogenen inkompressiblen und für den inhomogenen kompressiblen Fall berechneten.

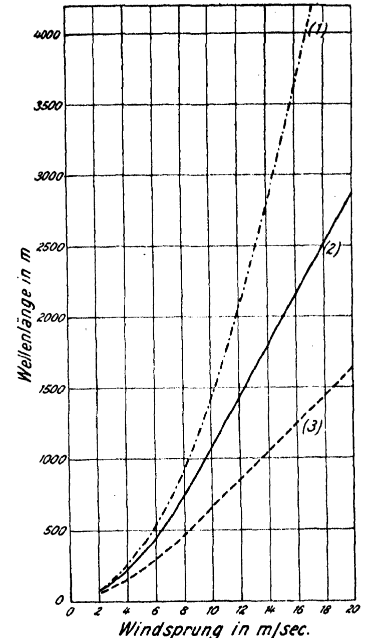



Fig. 5. Wellenlänge von Luftwogen bei einem Temperatursprung von 6° und verschiedenen Windsprüngen.
(1) in einer inkompressiblen ungeschichteten Atmosphäre.
(2) in einer kompressiblen geschichteten Atmosphäre.
(3) in einer inkompressiblen geschichteten Atmosphäre.

Tabelle XIV.
Beobachtete und berechnete Werte der Länge stationärer Wellen.

| Datum | $\Delta T$ | $2\,T_m$ | $U = \frac{\Delta U}{2}$ | $L$ beobachtet | $L$ inkompressibel homogen | $L$ inkompressibel inhomogen | $L$ kompressibel inhomogen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6. Dezember 1905 | 2,2° (4,0°) | 2·272° | 5,2 m/sec | 1600 m (1920 m) | 4300 m (2360 m) | 908 m (864 m) | 1605 m (1400 m) |
| 12. Februar 1906 | 1° | 2·272° | 2 m/sec | 709 m (1037 m) | 1390 m | 347 m | 624 m |
| 19. Februar 1906 | 3,7° | 2·273° | 1,51 m/sec | 175 m | 213 m | 166 m | 195 m |

In dem ersten Beispiel ist der nicht eingeklammerte Wert für den Temperatursprung der Abstiegswert; die nicht eingeklammerten Werte für die berechneten Wellenlängen sind mit diesem Wert berechnet. Der eingeklammerte beobachtete Wert für die Wellenlänge ist aus der Zeitdauer der längsten Temperaturwelle allein von A. Wegener berechnet und daher unwahrscheinlicher als der Wert von 1600 m, der aus dem mittleren Wert berechnet wurde. Wie man sieht, gibt die einfache Helmholtz-Wegenersche Formel (6. Spalte) zu große Werte, 2360 m bzw. richtiger 4300 m, denn da es sich bei der Wellenlänge um eine Beobachtung beim Drachenabstieg handelt, ist die Wellenlänge von 4300 m (die sich aus $\Delta T = 2{,}2^{0}$ ergibt) die Richtigere. Wenn man nur die Schichtung berücksichtigt, ist die Wellenlänge beträchtlich zu klein, wenn auch nicht mehr um so viel, wie vorher zu groß. Berücksichtigt man schließlich auch noch die Kompressibilität der Luft, so erhält man sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung. Am 12. Februar 1906 gibt Wegener als beobachtete, d. h. aus der Dauer der registrierten Temperaturoszillationen und der herrschenden Windgeschwindigkeit berechneten Wellenlänge 1037 m. Dabei ist als Windgeschwindigkeit 11,8 m/sec angesetzt, offenbar die „mittlere“ Windgeschwindigkeit der ganzen Schicht. Dagegen entnimmt man den Lindenberger Berichten eine Windgeschwindigkeit von 8 m/sec in 1000 m Höhe, d. i. in der Höhe der Sprungschicht. Dieser Wert ist zwar beim Aufstieg gemessen, aber da sich der Bodenwert der Windgeschwindigkeit bis zum Abstieg nicht geändert hat, darf man wohl dasselbe auch von dem Wert in 1000 m Höhe annehmen. Mit dieser Windgeschwindigkeit ergibt sich die Wellenlänge zu 709 m. Da die Wogen ja der Sprungschicht ihre Entstehung verdanken, ist die Annahme einer Windgeschwindigkeit von 8 m/sec und damit einer Wellenlänge von 709 m wohl plausibler, so daß auch das zweite Beispiel und ebenso auch das dritte zugunsten unserer Ansicht spricht, daß der Einfluß der Schichtung und Kompressibilität mit zu berücksichtigen ist, und daß man ohne diese Korrektionen wie Wegener zu große Wellenlängen erhält. Übrigens darf hierbei nicht vergessen werden, daß ja unsere Annahmen, wenigstens soweit sie die Stabilität der Schichtung betrafen, noch nicht mit der Natur übereinstimmten. In Wirklichkeit herrscht in der Troposphäre, in der die Luftwogen beobachtet werden, doch Temperaturabnahme nach oben, während wir Isothermie annahmen, also stärkere Stabilität der Schichtung voraussetzen, als tatsächlich vorhanden ist. Außerdem haben wir wie A. Wegener angenommen, daß obere und untere Schicht dem absoluten Betrag nach gleiche

Windgeschwindigkeiten aufweisen, was bekanntlich beträchtliche Abweichungen der Theorie von der Beobachtung bewirken kann. Schließlich gehören zu anderen Wellenformen andere Wellenlängen. Trotzdem wird, wie ich hoffe, aus den Beispielen und der ganzen Überlegung hervorgehen, daß die entwickelten Formeln u. a. hier ein brauchbares meteorologisches Anwendungsgebiet finden. Darum allein, nicht um eine erschöpfende Behandlung der Theorie der Luftwogen, handelte es sich hier zunächst [1]).

## § 19. Zwei Schichten mit fester unterer Grenze und freier Oberfläche.

Die feste untere Grenze des Systems liege in $z = 0$. Die untere Schicht I habe die Dicke $h^{\mathrm{I}}$, so daß also die Gleichung der ungestörten gemeinsamen Grenzfläche $z = h^{\mathrm{I}}$ ist. Die obere Schicht II habe die Mächtigkeit $h^{\mathrm{II}} - h^{\mathrm{I}}$; also wird die Gleichung der ungestörten freien Oberfläche $z = h^{\mathrm{II}}$.

Da die Grenzbedingung an der unteren starren Grenzfläche lautet

$$w^{\mathrm{I}}_{z=0} = 0,$$

wird

$$C^{\mathrm{I}} = K^{\mathrm{I}} e^{g\frac{\Gamma^{\mathrm{I}}}{2}z} \operatorname{Sin} N^{\mathrm{I}} z \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} D^{\mathrm{I}} &= i\,\frac{K^{\mathrm{I}} Q^{\mathrm{I}} e^{g\frac{\Gamma^{\mathrm{I}}}{2}z}}{\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{I}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})^2} \times \\ &\times \left\{\left[2\,\Omega_y \alpha + g\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{I}}}{2} - \gamma^{\mathrm{I}}\right)(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})\right] \operatorname{Sin} N^{\mathrm{I}} z + (\beta - \alpha U^{\mathrm{I}}) N^{\mathrm{I}} \operatorname{Cof} N^{\mathrm{I}} z\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir wollen während der folgenden Rechnung zur Abkürzung setzen

$$\alpha^2 - \gamma^{\mathrm{I}}(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}})^2 = \zeta^{\mathrm{I}} \qquad (\beta - \alpha U^{\mathrm{I}}) N^{\mathrm{I}} = l^{\mathrm{I}}$$

$$2\,\Omega_y \alpha + g\left(\frac{\Gamma^{\mathrm{I}}}{2} - \gamma^{\mathrm{I}}\right)(\beta - \alpha U^{\mathrm{I}}) = m^{\mathrm{I}},$$

und drei entsprechende Größen für die zweite Schicht, wobei also überall an Stelle der Indizes I die Indizes II treten. Für die zweite Schicht gilt zunächst, solange die Oberflächenbedingung nicht berücksichtigt wird, nach § 15

$$C^{\mathrm{II}} = e^{g\frac{\Gamma^{\mathrm{II}}}{2}z}\left(K^{\mathrm{II}}_1 e^{N^{\mathrm{II}} z} + K^{\mathrm{II}}_2 e^{-N^{\mathrm{II}} z}\right) \tag{3}$$

---

[1]) Eine Behandlung der Theorie der Luftwogen erscheint im Köppenbande von Gerlands Beiträgen zur Geophysik.

$$(4)\quad D^{II} = \frac{i}{\zeta^{II}} Q^{II} e^{\frac{g\Gamma^{II}}{2}z} \left\{ m^{II}\left(K_1^{II} e^{N^{II}z} + K_2^{II} e^{-N^{II}z}\right) + l^{II}\left(K_1^{II} e^{N^{II}z} - K_2^{II} e^{-N^{II}z}\right)\right\}.$$

Für den ungestörten Druck in einer genügend kleinen Umgebung der freien Oberfläche gilt, wenn $P_2^{II}$ den ungestörten Druck in $z = h^{II}$ bezeichnet,
$$P^{II} = P_2^{II}[1 - g\Gamma^{II}(z - h^{II})].$$

Die Gleichung der schwingenden freien Oberfläche lautet
$$P^{II} + p_2^{II} = 0,$$
und aus der Grenzbedingung der freien Oberfläche (2, 10a) folgt
$$-i(\beta - \alpha U^{II}) D_2^{II} - g Q_2^{II} C_2^{II} = 0.$$

In dieser Gleichung deuten die unteren Indizes 2 wie gewöhnlich darauf hin, daß in den betreffenden Ausdrücken $z = h^{II}$ zu setzen ist. Man erhält daraus als Relation zwischen den Konstanten $K_1^{II}$ und $K_2^{II}$ resp. durch Einführen einer neuen Konstanten $K^{II}$
$$\frac{K_1^{II} e^{N^{II} h^{II}}}{(\beta - \alpha U^{II})(m^{II} - l^{II}) - g\zeta^{II}} = -\frac{K_2^{II} e^{-N^{II} h^{II}}}{(\beta - \alpha U^{II})(m^{II} + l^{II}) - g\zeta^{II}} = \frac{K^{II}}{2}.$$

Damit wird aus (3) und (4)
$$(3a)\begin{cases} C^{II} = K^{II} e^{\frac{g\Gamma^{II}}{2}z} \times \\ \left\{[(\beta - \alpha U^{II}) m^{II} - g\zeta^{II}] \operatorname{Sin} N^{II}(z - h^{II}) - (\beta - \alpha U^{II}) l^{II} \operatorname{Cof} N^{II}(z - h^{II})\right\} \end{cases}$$
$$(4a)\begin{cases} D^{II} = \frac{i}{\zeta^{II}} Q^{II} K^{II} e^{-\frac{g\Gamma^{II}}{2}z} \left\{[(\beta - \alpha U^{II}) m^{II2} - g\zeta^{II} m^{II} - (\beta - \alpha U^{II}) l^{II2}] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Sin} N^{II}(z - h^{II}) - g\zeta^{II} l^{II} \operatorname{Cof} N^{II}(z - h^{II})\right\}. \end{cases}$$

Um die Frequenzengleichung aufzustellen, brauchen wir wieder die Grenzbedingungen an der gemeinsamen Grenzfläche beider Schichten. In genügend kleiner Umgebung dieser Grenzfläche (ungestört $z = 0$) ist
$$P^I - P^{II} = -g(Q_1^I - Q_1^{II})(z - h^I).$$

(Wir charakterisieren die auf diese Grenzfläche bezogenen Größen durch den Index 1.) Die Gleichung der gestörten Grenzfläche lautet
$$P^I - P^{II} + p_1^I - p_1^{II} = 0,$$
worin die angegebenen Größen für $P^I - P^{II}$ und für $p^I$, $p^{II}$ bzw. $D^I$, $D^{II}$ einzusetzen sind. Anwendung der Grenzbedingung (2, 9) gibt ein ziemlich umständliches System von zwei linearen homogenen Gleichungen für $K^I$ und $K^{II}$. Da natürlich $K^I$ und $K^{II}$ nicht gleich Null sein sollen, muß die Determinante des Systems gleich Null sein. Das liefert die Frequenzengleichung

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{Q_1^{\mathrm{I}}\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}{\zeta^{\mathrm{I}}}(m^{\mathrm{I}}+l^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}})-g\,(Q_1^{\mathrm{I}}-Q_1^{\mathrm{II}})\right\}- \\
-\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\zeta^{\mathrm{II}}}Q_1^{\mathrm{II}}\left\{(\beta-\alpha U^{\mathrm{II}})(m^{\mathrm{II}2}-l^{\mathrm{II}2})-g\zeta^{\mathrm{II}}[m^{\mathrm{II}}+l^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}}(h^{\mathrm{I}}-h^{\mathrm{II}})]\right\}- \\
-g\,(Q_1^{\mathrm{I}}-Q_1^{\mathrm{II}})\left\{(\beta-\alpha U^{\mathrm{II}})\,[m^{\mathrm{II}}-l^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}}(h^{\mathrm{I}}-h^{\mathrm{II}})]\right\}+ \\
+Q_1^{\mathrm{I}}Q_1^{\mathrm{II}}\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{I}}}{\zeta^{\mathrm{II}}}\,\frac{\beta-\alpha U^{\mathrm{II}}}{\zeta^{\mathrm{I}}}(m^{\mathrm{I}}+l^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}})\times \\
\times\left\{(\beta-\alpha U^{\mathrm{II}})(m^{\mathrm{II}2}-l^{\mathrm{II}2})-g\zeta^{\mathrm{II}}[m^{\mathrm{II}}+l^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}}(h^{\mathrm{I}}-h^{\mathrm{II}})]\right\}=0.
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Wir werden uns aber weiterhin nicht mit der Frequenzengleichung in dieser allgemeinen Form beschäftigen, sondern voraussetzen, daß der Wind an der Grenzfläche keinen Sprung erleidet, so daß wir setzen können $U^{\mathrm{I}}=U^{\mathrm{II}}=0$. Dann geht die Frequenzengleichung über in

$$\left.\begin{array}{l}
Q_1^{\mathrm{II}}(\beta^4-\alpha^2g^2)=\frac{Q_1^{\mathrm{I}}}{\alpha^2-\gamma^{\mathrm{I}}\beta^2}\left[g\left(\alpha^2-\frac{\Gamma^{\mathrm{I}}}{2}\beta^2\right)-\beta^2N^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}}\right]\times \\
\qquad\times\left[g\left(\frac{\beta^2\Gamma^{\mathrm{II}}}{2}-\alpha^2\right)-\beta^2N^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{Ctg}\,N^{\mathrm{II}}(h^{\mathrm{I}}-h^{\mathrm{II}})\right].
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Wir nehmen zunächst an, daß beide Schichten sehr tief sind im Verhältnis zur Wellenlänge. (In § 16 sahen wir, daß diese Annahme bei Wellen, wie wir sie hier betrachten, im allgemeinen gerechtfertigt ist.) Dann geht (6) in eine Gleichung über, die, wie man leicht nachweist, mit (7, 8) identisch ist. Also lassen sich, wie schon damals bemerkt, alle für den Fall zweier unendlicher Schichten zwischen starren Grenzen gezogenen Schlüsse auf zwei unendlich tiefe Schichten mit freier Oberfläche übertragen.

Ist die Tiefe der unteren Schicht beliebig, die der oberen sehr groß, was im allgemeinen auf die Atmosphäre zutrifft, so bestätigt man ebenfalls durch Einsetzen, daß Oberflächenwellen vom Stokes'schen Typus

$$\beta^2=\alpha g$$

möglich sind, die ihren Sitz an der freien Oberfläche haben. Weiter wollen wir diesen Fall hier nicht verfolgen.

Desgleichen soll der Fall zweier sehr flacher Schichten hier nicht behandelt werden. Die Durchrechnung zeigt im übrigen, daß die Abweichungen der Wellengeschwindigkeit in einer kompressiblen Flüssigkeit von der Wellengeschwindigkeit in einer inkompressiblen inhomogenen Flüssigkeit, die in § 8 behandelt wurde, sehr klein sind.

# Schluß.

Eine nochmalige Übersicht über die Resultate zu geben, erübrigt sich mit Rücksicht auf die Einleitung. Es mögen hier nur noch ein paar Punkte hervorgehoben werden, die die Fortführung der Untersuchung betreffen.

In der vorliegenden Arbeit ist durchweg allein der Fall exponentiell abnehmender Dichte, d. h. isothermer Atmosphäre, bzw. linearer vertikaler Windabnahme oder -zunahme behandelt worden, um Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu erhalten. Das bringt natürlich eine Beschränkung in der Anwendbarkeit der abgeleiteten Formeln mit sich, obwohl sich auch unter unseren Annahmen, wie das Beispiel der Wogenwolken beweist, recht befriedigende Resultate ergeben. Es wird deshalb nötig sein, auch die Wirkungen linearer Temperaturabnahme und anderer, den natürlichen Verhältnissen mehr angepaßter, Windverteilungen auf die Wellenbewegungen zu untersuchen. Das kann einmal auf dem hier eingeschlagenen Wege geschehen, wobei a priori keine Voraussetzungen über die Dimensionen der Wellen gemacht werden, ferner aber, indem man die für lange Wellen gültigen Untersuchungen von Bjerknes über quasistatische Wellenbewegungen auch auf den baroklinen Fall überträgt. Bei Mitberücksichtigung der Erdrotation haben ja im übrigen gerade die langen Wellen ein besonderes Interesse wegen ihrer Bedeutung für das Zyklonenproblem.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist, wie schon in der Einleitung betont wurde, einen Überblick darüber zu erhalten, wie die bekannten Wellentypen durch vertikale Dichteänderung in den Ozeanen und durch die Kompressibilität in der Luft modifiziert werden. Derartige Untersuchungen sind seitens der Geophysiker häufig mit unzureichenden analytischen Hilfsmitteln unternommen worden. Vielleicht dient die vorliegende Untersuchung dazu, auch etwas zur Verbesserung der mathematischen Methoden beizutragen.

Von Anwendungen auf spezielle Naturerscheinungen sind hier nur die stationären Wellen (Luftwogen) behandelt worden. Weitere Beispiele für Anwendungsmöglichkeiten der entwickelten Formeln, z. B. auf Schwingungen der Luft in einem Gebirgstale, auf Schwingungen, wie sie Weickmann 1927 beim maritim-kontinentalen System festgestellt hat und anderes, sollen später folgen.

## Literaturverzeichnis.

J. Bartels, **1927**. Über die atmosphärischen Gezeiten. Abhandl. d. Preuß. Met. Inst., Bd. VIII.

V. Bjerknes, **1916**. Über Wellenbewegungen in kompressiblen, schweren Flüssigkeiten. Sächs. Ak. d. Wiss., Math.-Phys. Kl., Bd. 35, 2.

— **1921**. Dynamique des fluides baroclines Chap. 37, 1 von Appel, Mécan. rat., t. III, 3ème, Éd. 1921.

— **1923**. On quasistatic wavemotion in barotropic fluid strata. Geofys. Publ., Bd. III, 3.

— **1926** und **1927**. Die atmosphärischen Störungsgleichungen. Beitr. z. Physik d. fr. Atmosph., Bd. 13, und Zs. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 7.

— **1929**. Über die hydrodynamischen Gleichungen in Lagrangescher und Eulerscher Form und ihre Linearisierung für das Studium kleiner Störungen.

— und H. Solberg, **1929**. Zellulare Trägheitswellen und Turbulenz. Norske Vid.-Akad. Avhandl. I, Math.-Nat. Kl. 1929, Nr. 7.

D. Brunt, **1927**. The period of simple vertical oscillations in the atmosphere. Quat. Journ. Roy. Met. Soc., Bd. 53, S. 30.

W. Burnside, **1889**. On the small wavemotions of a heterogeneous fluid under gravity. Proc. Lond. Math. Soc. Vol. XX, 1888/89.

S. Chapman, **1924**. The semidiurnal oscillation of the atmosphere. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., Bd. 50, S. 165.

A. Defant, **1926**. Schwingungen einer zweifach geschichteten Atmosphäre und ihr Verhältnis zu den Wellen im Luftmeer. Beitr. zur Physik d. fr. Atmosph., Bd. 12, S. 112.

R. Emden, **1897**. Eine Beobachtung über Luftwogen. Wiedemanns Ann. LXII, S. 374.

F. M. Exner, **1926**. Zu Defants Theorie der Schwingungen einer geschichteten Atmosphäre.

— **1929**. Über Gravitationswellen in der Atmosphäre. Wien. Sitz.-Ber., Abt. IIa, Bd. 138, S. 223.

B. Haurwitz, **1930**. Zur Berechnung von oszillatorischen Luft- und Wasserströmungen. Gerl. Beitr. z. Geophys., Bd. 27, S. 26.

G. Hellmann, **1915**. Über die Bewegung der Luft in den untersten Schichten der Atmosphäre. Met. Zs. 1915, S. 1.

H. v. Helmholtz, **1888**. Über atmosphärische Bewegungen. Ges. Abhandl., Bd. III, S. 289.

— **1889**. Über atmosphärische Bewegungen. II. Zur Theorie von Wind und Wellen. Ges. Abhandl., Bd. III, S. 309.

— **1890**. Die Energie der Wogen und des Windes. Ges. Abhandl., Bd. III, S. 333.

Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup, **1915**. Die Reibung in der Atmosphäre. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser., Bd. I.

L. Högberg, **1923**. An explicit solution of the problem of wavemotion in three barotropic fluid strata. Geofys. Publ. III, 4.

H. Jeffreys, **1926**. On the dynamics of geostrophic winds. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., Bd. 52, S. 85.

H. Lamb, **1911**. On atmospheric oscillations. Roy. Soc. Proc. Lond., Ser. A, Vol. 84, S. 551.

A. E. H. Love, **1891**. Wave-motion in a heterogeneous heavy liquid. Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 22, 1891/92.

M. Margules, **1890**. Über Schwingungen periodisch erwärmter Luft. Wien. Sitz.-Ber., Abt. IIa, Bd. 99.

— **1892/93**. Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale bei zonaler Druckverteilung. Teil I—III. Wien. Sitz.-Ber., Abt. IIa, Bd. 101.

S. D. Poisson, **1816**. Mémoire sur la théorie des ondes. Mém. de l'Acad. des Sciences I, 1816.

Lord Rayleigh, **1883**. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 14, 1882/83.

S. Sano, **1913**. Some problems on waves propagating in air at uniform temperature. Bull. Centr. Met. Obs. Jap., Bd. 2, 13.

H. Solberg, **1928**. Integrationen der atmosphärischen Störungsgleichungen I. Geofys. Publ., Vol. 5, Nr. 9.

— **1929**. Wellenbewegungen einer isothermen Atmosphäre. Rep. 18. Scand. Naturalist Congr. Copenhagen, August 1929.

F. Trey, **1919**. Ein Beitrag zum Studium der Luftwogen. Met. Zs., Bd. 36, S. 25.

A. Wegener, **1906**. Studien über Luftwogen. Beitr. z. Physik d. fr. Atmosph., Bd. II, S. 55.

— **1912**. Nachtrag zu den „Studien über Luftwogen“. Beitr. z. Physik d. fr. Atmosph., Bd. 4, S. 23.

L. Weickmann, **1927**. Das Wellenproblem der Atmosphäre. Met. Zs., Bd. 44, S. 241.

W. Wien, **1894**. Über den Einfluß des Windes auf die Gestalt der Meereswellen. Berliner Sitz.-Ber. 1894, I, S. 509.

**1895**. Über die Gestalt der Meereswellen. Berliner Sitz.-Ber. 1895, I, S. 343.